

Tecniche Wiener-Hopf per lo studio di onde in regioni con discontinuità geometriche

V.Daniele

Corso di terzo livello della Scuola di
Dottorato del Politecnico di Torino

A.A. 2001-2002

Fin dalla sua invenzione nel 1931, la tecnica Wiener-Hopf ha dimostrato di essere un metodo molto importante in ingegneria ed in fisica matematica. Infatti essa offre uno dei pochi procedimenti che consentono di ottenere in forma analitica la soluzione esatta di una classe di equazioni integrali che ha grande rilevanza in molteplici campi di applicazione quali la diffrazione di onde acustiche ed elettromagnetiche, lo studio di onde in strutture presentanti discontinuità geometrica, l'elasticità, la meccanica delle fratture, l'idrodinamica, la fluidodinamica, la crescita nei cristalli, la geofisica, la diffusione del calore, la teoria del trasporto, la teoria ottimale dei filtri, i problemi di interazioni di fluidi con strutture, i metodi di probabilità applicata solo per nominarne alcuni. La tecnica Wiener-Hopf è nello stesso tempo semplice e ricca di profondi contenuti concettuali.

La conoscenza di essa consente non solo di risolvere problemi applicativi fondamentali ma arricchisce notevolmente la formazione culturale di un Dottorando in Ingegneria od in Matematica Fisica.

In particolare la Tecnica Wiener-Hopf fornisce in modo pratico le nozioni piu' avanzate della Teoria delle funzioni analitiche e del calcolo matriciale. Essa inoltre e' particolarmente apprezzata in ambito ingegneristico in quanto e' in sostanza un metodo simbolico (che generalizza quello sviluppato per le reti dinamiche) per risolvere problemi aventi come incognite campi ed onde.

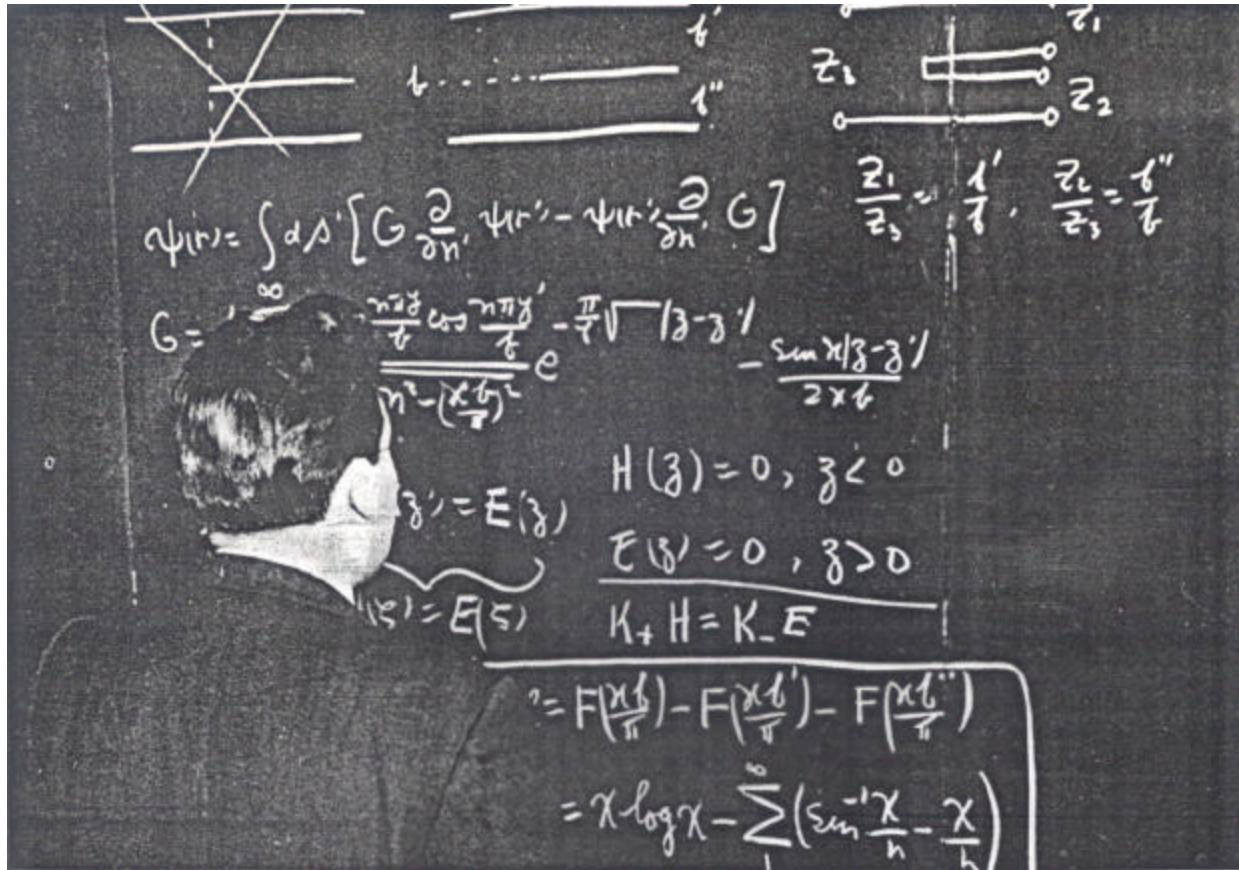
Testi:

B.Noble: The Wiener-Hopf technique, 2nd edition 1988, Chelsea Pub. Co.

L.A.Weinstein: The theory of diffraction and the factorization method, 1969, The Golem Press

R.Mitra and S.W.Lee: Analytical Techniques in the Theory of guided Waves , 1971, The MacMillan Company

Wiener and Hopf 1931



<http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Mathematicians/Schwinger.html>

Schwinger: A new era has dawned, (Copson, Fock)

Equazione integrale convoluzionale

$$g * f = f_o$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z - z') f(z') dz' = f_o(z) \quad \Rightarrow \quad G(\mathbf{a})F(\mathbf{a}) = F_o(\mathbf{a})$$

$$-\infty < z < +\infty$$

z variabile naturale

\mathbf{a} pulsazione (spaziale)

$$F(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{j\mathbf{a}z} dz = \text{Fourier}[f(z)]$$

$$G(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z) e^{j\mathbf{a}z} dz = \text{Fourier}[g(z)] \quad \text{kernel}$$

$$F_o(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} f_o(z) e^{j\mathbf{a}z} dz = \text{Fourier}[f_o(z)]$$

Equazione integrale Wiener-Hopf (semiconvoluzionale)

$$\int_0^{\infty} g(z - z') f(z') = f_o(z) \quad 0 \leq z < +\infty$$

Equazioni integrale che ha grande rilevanza in molteplici campi di applicazione quali la diffrazione di onde acustiche ed elettromagnetiche, lo studio di onde in strutture presentanti discontinuita' geometrica, l'elasticita', la meccanica delle fratture, l'idrodinamica, la fluidodinamica, la crescita nei cristalli, la geofisica, la diffusione del calore, la teoria del trasporto, la teoria ottimale dei filtri, i problemi di interazioni di fluidi con strutture, i metodi di probabilita' applicata solo per nominarne alcuni .

Come succede per l'equazione convoluzionale , anche per l'equazione W-H e' fondamentale lavorare nel dominio delle pulsazioni spaziali α

Si ha:

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-x')f(x')u(x') dx' = f_o(x)u(x) + f_-(x)(1-u(x)) \quad ,$$

$-\infty < x < \infty$

$u(x)$: funzione gradino

By Fourier transforming eq. (4), it yields the following functional equation:

$$G(\alpha)F_+(\alpha) = F_-(\alpha) + F_{o+}(\alpha)$$

where $F_+(\alpha)$, $F_{o+}(\alpha)$ and $F_-(\alpha)$ are, respectively, the Fourier transforms of the right axis functions $f(x)u(x)$, $f_o(x)u(x)$ and of the left-axis function $f_-(x)(1-u(x))$.

The W-H equations can be classified as scalar or vector, the former involves only scalar quantities, the latter also vector quantities of order n, such as $F_+(\alpha)$, $F_{o+}(\alpha)$ and $F_-(\alpha)$, and matrix quantities, such as $G(\alpha)$, a square matrix of the same order. The scalar case, the simplest class of W-H equations, can always be solved in closed form ; conversely, for the vector case, there is no closed-form solution for the general case. In fact, in spite of the great efforts by many scientists, there has been little progress towards a general method of explicit solution in this case.

We can say that the state of the art is now that in the seventy years since the solution of the scalar equation was found, the vector equation has been solved in closed forms only in very particular cases, for specific forms of the matrix $G(\alpha)$. However, efficient approximate solution procedures to handle effectively the problem in these cases apply, and these will be described later.

Apparently it seems that the presence of the two unknowns $F_+(\alpha)$ and $F_-(\alpha)$ requires other equations in addition to

$$G(\alpha)F_+(\alpha) = F_-(\alpha) + F_{o+}(\alpha)$$

in order to get the proper solution. However, impressive mathematical literature proved that solving this equation constitutes a closed mathematical problem. This is due to the fact that even though the previous equation has been deduced on the real axis of the α plane, an analytic continuation of it stands and makes it valid everywhere. Dealing with the whole complex plane α , important analytical properties of $F_+(\alpha)$ and $F_-(\alpha)$ “a priori” known provide the additional information required to solve eq.1. For instance the plus function $F_+(\alpha)$ has all its singularities in a lower α -half plane while the minus function $F_-(\alpha)$ has all its singularities in an upper α -half plane.

If the convolution integral has been defined on a finite support $0 < x' < L$, the integral equation so stands:

$$\int_0^L g(x-x')f(x')dx' = f_o(x) \quad 0 \leq x \leq L$$

Also this equation reduces to a (vector) Wiener-Hopf equation having the form:

$$\mathbf{G}(\alpha) \cdot \mathbf{X}_+(\alpha) = \mathbf{X}_-(\alpha) + \mathbf{X}_{o+}(\alpha)$$

Esempio:

$$\int_0^{\infty} g(x-x')f(x')dx' = \frac{1}{4}e^{-2x} \quad (x > 0)$$

$$g(x) = \delta(x) - \frac{4}{3}e^{-3|x|}$$

$$f(x) - \int_0^{\infty} \frac{4}{3}e^{-2|x-x'|}f(x')dx' = e^{-2x} \quad (x > 0)$$

Equazione di seconda specie

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-x')f(x')dx' = \frac{1}{4}e^{-2|x|} + f_-(x)$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

Dominio delle frequenze spaziali

$$g(x) = \delta(x) - \frac{4}{3}e^{-3|x|} \Rightarrow G(\alpha)$$

$$G(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{j\alpha x} dx = 1 - \frac{4}{3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-3|x|} e^{j\alpha x} dx =$$

$$1 - \frac{8}{\alpha^2 + 9} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + 9}$$

$$F_o(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4} e^{-2|x|} e^{j\alpha x} dx =$$

$$\frac{1}{\alpha^2 + 4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x-x') f(x') u(x') dx' = \frac{1}{4} e^{-2|x|} + f_-(x)$$

$$(-\infty < x < +\infty)$$

⇓

$$\frac{\alpha^2 + 1}{\alpha^2 + 9} F_+(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2 + 4} + F_-(\alpha)$$

ESEMPIO EQUAZIONE W-H

$$G(\alpha) F_+(\alpha) = F_0(\alpha) + F_-(\alpha)$$

$$\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2+9} F_+(\alpha) = \frac{\alpha}{\alpha^2+4} + F_-(\alpha)$$

TEOREMA DI LIOUVILLE

$$X_+(\alpha) = X_-(\alpha) = W$$

SE $X_+(\alpha)$ o $X_-(\alpha) \rightarrow 0$, $W = 0$

IDEA FONDAMENTALE:

FARE IN MODO CHE L'EQUAZIONE
W-H VENGA RISCRISSA NELLA FORMA

$$X_+(\alpha) = X_-(\alpha)$$

CIO SI REALIZZA FATTORIZZANDO

IL KERNEL

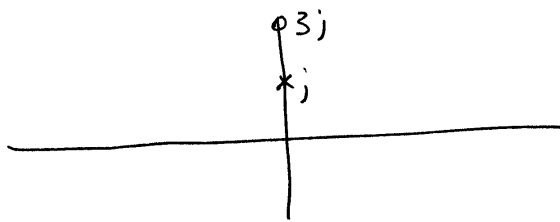
$$G(\alpha) = G_-(\alpha) G_+(\alpha)$$

11

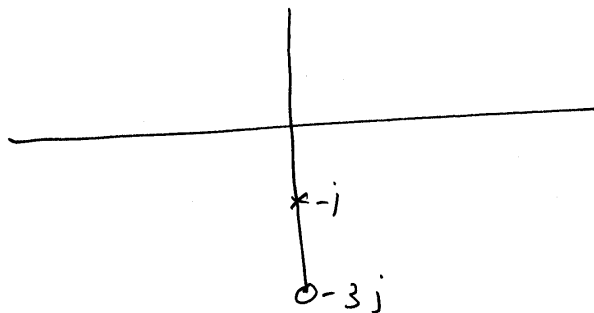
$$\frac{\alpha^2+1}{\alpha^2+9} = \frac{\alpha-j}{\alpha-j3} \frac{\alpha+j}{\alpha+j3}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ G(\alpha) & G_-(\alpha) & G_+(\alpha) \end{array}$$

SINGOLARITÀ E ZERI DI $G_-(\alpha)$



SINGOLARITÀ E ZERI DI $G_+(\alpha)$



$$G(\alpha) F_+(\alpha) = F_0(\alpha) + F_-(\alpha) \rightarrow G_+(\alpha) F_+(\alpha) = G_-^{-1}(\alpha) F_0(\alpha) + G_-^{-1}(\alpha) F_-(\alpha)$$

$$\underbrace{\frac{\alpha+j}{\alpha+j3}}_{+} F_+(\alpha) = \frac{\alpha-3j}{\alpha-j} \cdot \frac{\alpha}{\alpha^2+4} + \underbrace{\frac{\alpha-3j}{\alpha-j}}_{-} F_-(\alpha)$$

$$\frac{\alpha - 3j}{\alpha - j} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4} = S(\alpha)$$

NON È NE PIÙ
NE MENO

DECOMPONIAMO $S(\alpha) = S_-(\alpha) + S_+(\alpha)$
(SEMPRE POSSIBILE)

$$\frac{\alpha - 3j}{\alpha - j} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4} = \underbrace{\frac{R_1}{\alpha - j} + \frac{R_2}{\alpha - 2j}}_+ + \underbrace{\frac{R_3}{\alpha + 2j}}_-$$

$$R_1 = \lim_{\alpha \rightarrow j} (\alpha - j) S(\alpha) = (j - 3j) \frac{j}{-1 + 4} = \frac{2}{3}$$

$$R_2 = \lim_{\alpha \rightarrow 2j} (\alpha - 2j) S(\alpha) = (2j - 3j) \frac{2j}{2j - j} = -\frac{1}{2}$$

$$R_3 = \lim_{\alpha \rightarrow -2j} (\alpha + 2j) S(\alpha) = \frac{(-2j - 3j)}{-2j - j} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{\alpha - 3j}{\alpha - j} \frac{\alpha}{\alpha^2 + 4} = \underbrace{\frac{2}{3} \frac{1}{\alpha - j} + \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha - 2j}}_{S_-(\alpha)} + \underbrace{\frac{5}{3} \frac{1}{\alpha + 2j}}_{S_+(\alpha)}$$

$$\frac{\alpha+i}{\alpha+i3} F_+(\alpha) - \frac{5}{3} \frac{1}{\alpha+2j} = \frac{2}{3} \frac{1}{\alpha-j} - \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha-2j} + \frac{\alpha-3j}{\alpha-j} F_-(\alpha) = w$$

$$\left(\begin{array}{l} G_+(\alpha) F_+(\alpha) - S_+(\alpha) \\ \downarrow \\ X_+(\alpha) \end{array} = \begin{array}{l} S_-(\alpha) + G_-(\alpha) F_-(\alpha) \\ \downarrow \\ X_-(\alpha) \end{array} = w \right)$$

$$f_+(x) = \left(\frac{5}{3} e^{-2x} - \frac{10}{3} e^{-x} \right) u(x)$$

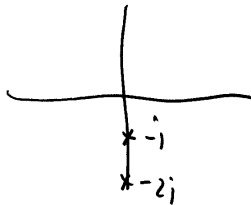
$$\frac{\alpha+i}{\alpha+i3} F_+(\alpha) - \frac{5}{3} \frac{1}{\alpha+2j} = 0 \Rightarrow F_+(\alpha) = \frac{5}{3} \frac{(\alpha+i3)}{(\alpha+i)(\alpha+2j)}$$

$$\frac{1}{3} \frac{1}{\alpha-j} - \frac{1}{2} \frac{1}{\alpha-2j} + \frac{\alpha-3j}{\alpha-j} F_-(\alpha) = 0$$

$$f_-(x) = \left(\frac{2}{3} e^{+3x} - \frac{1}{2} e^{+2x} \right) u(x)$$

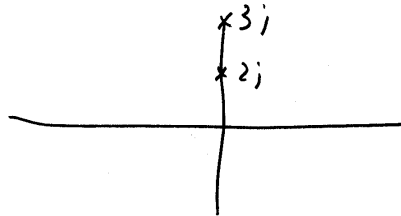
$$F_-(\alpha) = \frac{\alpha+i}{6(\alpha-2j)(\alpha-3j)}$$

SINGOLARITA' $F_+(\alpha)$



$$F_+(\alpha) = \frac{S_+(\alpha)}{G_+(\alpha)}$$

SINGOLARITA' $F_-(\alpha)$



$$F_-(\alpha) = \frac{S_-(\alpha)}{G_-(\alpha)}$$

Equazione Wiener-Hopf vettoriale:

$$G(\alpha) \cdot F_+(\alpha) = F_-(\alpha) + F_o(\alpha)$$

E' richiesta la fattorizzazione della matrice $G(\alpha)$.

$$G(\alpha) = G_-(\alpha) \cdot G_+(\alpha)$$

$G_-(\alpha)$, $G_+(\alpha)$, $G_-^{-1}(\alpha)$ e $G_+^{-1}(\alpha)$ (funzioni piu' e meno standard)

Questa si sa fare se la matrice e' razionale.

Esempio

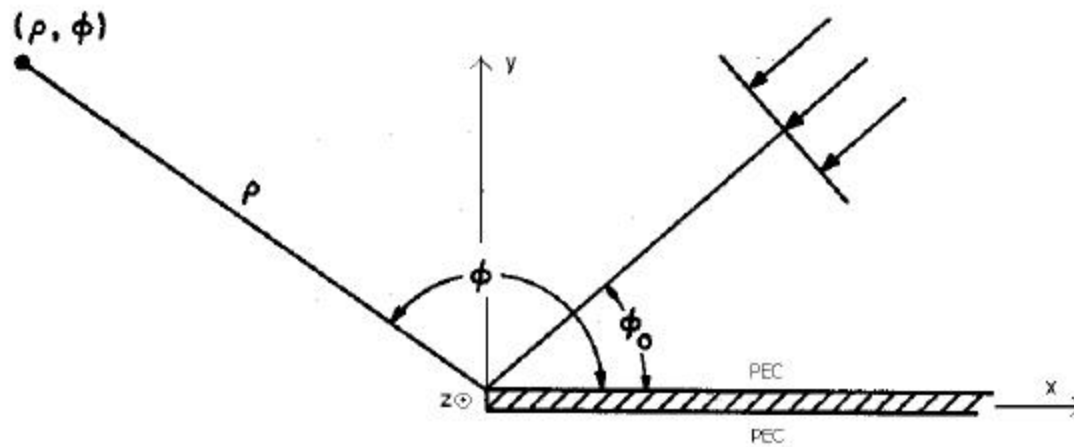
Fattorizzazione di:

$$G(\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & jq \frac{\alpha^2 + A^2}{\alpha^2 + B^2} \\ jq & 1 \end{vmatrix} = G_-(\alpha) G_+(\alpha)$$

(A e B reali e positive)

$$G_-(\alpha) = \left| \begin{array}{cc} \frac{j(\sqrt{B^2 + A^2 q^2} + j\sqrt{1+q^2}\alpha)}{(-B\sqrt{1+q^2} + \sqrt{B^2 + A^2 q^2})(B + j\alpha)} & \frac{1}{Bq - \frac{q\sqrt{B^2 + A^2 q^2}}{\sqrt{1+q^2}}} \\ 0 & -\frac{j}{-B + \frac{\sqrt{B^2 + A^2 q^2}}{\sqrt{1+q^2}}} \end{array} \right|$$

$$G_+(\alpha) = \left| \begin{array}{cc} 0 & \frac{(-B\sqrt{1+q^2} + \sqrt{B^2 + A^2 q^2})(\sqrt{B^2 + A^2 q^2} - j\sqrt{1+q^2}\alpha)}{q(B - j\alpha)} \\ Bq - \frac{q\sqrt{B^2 + A^2 q^2}}{\sqrt{1+q^2}} & -\frac{(Bq - \frac{q\sqrt{B^2 + A^2 q^2}}{\sqrt{1+q^2}})(jB + \alpha)}{q(B - j\alpha)} \end{array} \right|$$



$$\nabla^2 E_z + k^2 E_z = j\omega m J_z \quad g(\phi) = \frac{J}{4} H_0^{(2)}(k\rho)$$

$$E_z = E_z^i + j\omega m \int_{\phi'} g(\phi - \phi') J_z(\phi') d\phi'$$

Imponendo la condizione al contorno si ha l'equazione integrale:

$$E_z(x,0) = E_z^i(x,0) - \frac{\omega m}{4} \int_0^\infty H_0^{(2)}(k|x-x'|) J_z(x') dx' = 0 \quad x \geq 0$$

Equazione integrale Wiener-Hopf (semiconvoluzionale)

$$\int_0^{\infty} g(z - z') f(z') = f_o(z) \quad 0 \leq z < +\infty$$

Soluzione (Wiener and Hopf 1931)

1^a IDEA: Incognite:

$$f_+(z) = f(z)u(z) \quad f_{o+}(z) = f_o(z)u(z)$$

$$f_-(z) = u(-z) \int_0^{\infty} g(z - z') f(z') dz'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z - z') f_+(z') = f_-(z) + f_{o+}(z) \quad -\infty < z < \infty$$

Si ottiene equazione convoluzionale. Prezzo: due incognite $f_+(z)$ e $f_-(z)$

Nel dominio delle pulsazioni spaziali \mathbf{a}

$$G(\mathbf{a})F_+(\mathbf{a}) = F_-(\mathbf{a}) + F_{o+}(\mathbf{a}) \quad \text{Equazione di Wiener-Hopf}$$

Osservazione: L'equazione e' una ma l'incognite sono due!

Il problema e' matematicamente ben posto? Si

$F_+(\mathbf{a})$ e $F_-(\mathbf{a})$ sono sostanzialmente trasformate di Laplace. Esse sono funzioni analitiche aventi come elementi analitici gli integrali definiti da:

$$F_+(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z)u(z)e^{j\mathbf{a}z} dz = \int_0^{\infty} f_+(z)e^{j\mathbf{a}z} dz = \int_0^{\infty} f_+(z)e^{-sz} dz \Big|_{s=-j\mathbf{a}} = L[f_+(z)] \Big|_{s=-j\mathbf{a}}$$

$$F_-(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^0 f_-(z)e^{j\mathbf{a}z} dz = \int_{-\infty}^0 f_-(z)e^{j\mathbf{a}z} dz = \int_0^{\infty} f_-(-z)e^{s z} dz \Big|_{s=j\mathbf{a}} = L[f_-(-z)] \Big|_{s=j\mathbf{a}}$$

Tricomi: Dimmi le tue singularita' e ti diro' chi sei

Novita': Oltre i poli (di solito del primo ordine) sono presenti anche punti di ramificazione

Osservazione: Le Singularita' del Kernel sono strutturali

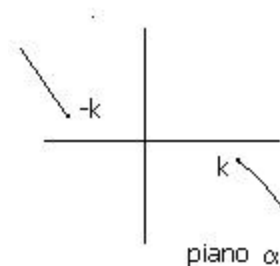
Esempio: Un kernel molto importante proviene dalla funzione di Green di sorgente lineica (k costante di propagazione):

$$g(z - z') = H_0^{(2)}(k|z - z'|) \Rightarrow G(\mathbf{a}) = \frac{2}{\sqrt{k^2 - \mathbf{a}^2}}$$

I mezzi saranno sempre considerati con perdite. $\text{Im}[k] < 0$

I mezzi senza perdite saranno visti come caso

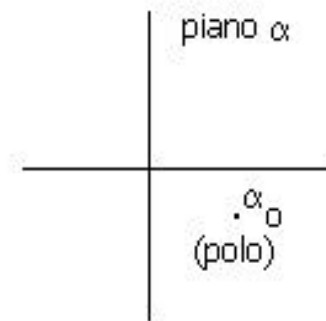
limite $\text{Im}[k] = 0$ Sull'asse reale non ci sono singularita'



Singularita' della sorgente: non sono strutturali

Esempio:onda piana $f_o(z) = e^{-j\mathbf{a}_o z}$

$$F_{o+}(\mathbf{a}) = \int_0^\infty e^{-j\mathbf{a}_o z} e^{j\mathbf{a} z} dz = \frac{j}{\mathbf{a} - \mathbf{a}_o}$$



Definizione

Una funzione $X_+(\mathbf{a})$ della pulsazione spaziale \mathbf{a} si dice funzione piu' standard se:

- ha singularita' solo nel semipiano inferiore $\text{Im}[\mathbf{a}] < 0$
- Oppure e' regolare nel semipiano superiore $\text{Im}[\mathbf{a}] \geq 0$
- ha comportamento algebrico per

$\mathbf{a} \rightarrow \infty$ nel semipianodi regolarita' $\text{Im}[\mathbf{a}] \geq 0$

Esempio:

$$F_{o+}(\mathbf{a}) = \frac{j}{\mathbf{a} - \mathbf{a}_o} \quad \text{e' piu' standard se } \text{Im}[\mathbf{a}_o] < 0$$

Una funzione $X_-(\mathbf{a})$ della pulsazione spaziale \mathbf{a} si dice funzione meno standard se:

-ha singolarita' solo nel semipiano superiore $\text{Im}[\mathbf{a}] > 0$

-Oppure e' regolare nel semipiano inferiore $\text{Im}[\mathbf{a}] \leq 0$

- ha comportamento algebrico per

$$\mathbf{a} \rightarrow \infty \text{ nel semipianodi regolarita' } \text{Im}[\mathbf{a}] \leq 0$$

Osservazione: L'equazione Wiener-Hopf si puo' sempre formulare in modo che siano coinvolte incognite $F_+(\mathbf{a})$ e $F_-(\mathbf{a})$ che sono funzioni **piu'** e **meno standard**. In seguito, se non precisato altrimenti, le incognite sono supposte standard.

Osservazione: Se le funzioni piu' e meno sono anche trasformate di Laplace, esse svaniscono all'infinito

2^a idea (fondamentale e geniale):

$$G(\mathbf{a})F_+(\mathbf{a}) = F_-(\mathbf{a}) + F_{o+}(\mathbf{a})$$

Fattorizzare il kernel

$$G(\mathbf{a}) = G_-(\mathbf{a})G_+(\mathbf{a})$$

in modo che le fattorizzanti

$G_-(\mathbf{a})$ e $G_+(\mathbf{a})$ e le loro inverse $G_-^{-1}(\mathbf{a})$ e $G_+^{-1}(\mathbf{a})$

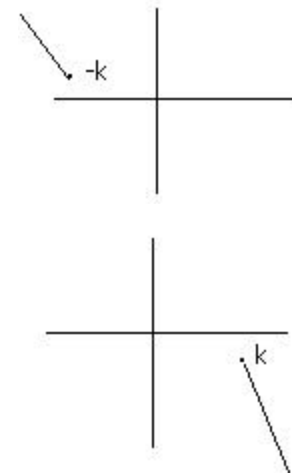
siano funzioni meno e piu' standard

Esempio:

$$G(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{k^2 - \mathbf{a}^2}} = G_-(\mathbf{a})G_+(\mathbf{a})$$

$$G_-(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{k + \mathbf{a}}} \quad G_-^{-1}(\mathbf{a}) = \sqrt{k + \mathbf{a}}$$

$$G_+(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{k - \mathbf{a}}} \quad G_+^{-1}(\mathbf{a}) = \sqrt{k - \mathbf{a}}$$



Invece:

$$\tilde{G}_-(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{k + \mathbf{a}}} e^{-j\mathbf{a}} \quad \tilde{G}_+(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{k - \mathbf{a}}} e^{j\mathbf{a}}$$

non sono standard (comportamento non algebrico)

$$G_+(\mathbf{a})F_+(\mathbf{a}) = G_-^{-1}(\mathbf{a})F_-(\mathbf{a}) + G_-^{-1}(\mathbf{a})F_{o+}(\mathbf{a})$$

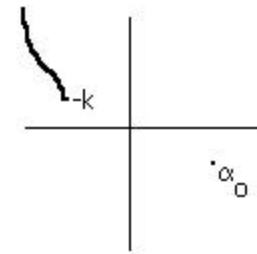
\uparrow
 noto

3^a idea: decomposizione del termine noto

$$S(\mathbf{a}) = G_-^{-1}(\mathbf{a})F_{o+}(\mathbf{a}) = S_-(\mathbf{a}) + S_+(\mathbf{a})$$

\uparrow
 decomposizione

Esempio: $S(\mathbf{a}) = \frac{1}{\sqrt{k+\mathbf{a}}} \frac{1}{\mathbf{a}-\mathbf{a}_o}$



$$S_+(\mathbf{a}) = \frac{R(\mathbf{a}_o)}{\mathbf{a}-\mathbf{a}_o} = \frac{1}{\sqrt{k+\mathbf{a}_o}} \frac{1}{\mathbf{a}-\mathbf{a}_o} \quad S_-(\mathbf{a}) = \left(\frac{1}{\sqrt{k+\mathbf{a}}} - \frac{1}{\sqrt{k+\mathbf{a}_o}} \right) \frac{1}{\mathbf{a}-\mathbf{a}_o}$$

4^a idea: Separazione delle funzioni piu' e meno:

$$G_+(\mathbf{a})F_+(\mathbf{a}) - S_+(\mathbf{a}) = G_-^{-1}(\mathbf{a})F_-(\mathbf{a}) + S_-(\mathbf{a}) = w(\mathbf{a})$$

L'equazione precedente per prolungamento analitico vale in tutto il piano complesso. Ne consegue che essendo il primo membro regolare nel semipiano superiore (**asse reale compreso**) ed il secondo membro regolare nel semipiano inferiore (**asse reale compreso**), la funzione $w(\mathbf{a})$ e' priva di singularita' (funzione intera). Inoltre essendo algebrici all'infinito i comportamenti delle funzioni piu' e meno in base al teorema di Liouville, $w(\mathbf{a})$ e' un polinomio. Se le funzioni incognite $F_+(\mathbf{a})$ e $F_-(\mathbf{a})$ sono anche trasformate di Laplace tale polinomio si annulla e si ottengono le soluzioni (nel dominio di Laplace):

$$F_+(\mathbf{a}) = G_+^{-1}(\mathbf{a})S_+(\mathbf{a}), \quad F_-(\mathbf{a}) = -G_-(\mathbf{a})S_-(\mathbf{a})$$

Esempio: Risolvere l'equazione Wiener-Hopf

$$\int_0^{\infty} H_0^{(2)}(k|z-z'|) f(z') dz' = -\frac{1}{2} j e^{-ja_0 z} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{k^2 - a^2}} F_+(a) = F_-(a) + \frac{1}{a - a_0}$$

$$0 \leq z < \infty$$

La fattorizzazione del kernel $\frac{1}{\sqrt{k^2 - a^2}} = \frac{1}{\sqrt{k+a}} \frac{1}{\sqrt{k-a}}$ conduce a:

$$\frac{1}{\sqrt{k-a}} F_+(a) = \sqrt{k+a} F_-(a) + \frac{\sqrt{k+a}}{a - a_0}$$

la decomposizione di: $\frac{\sqrt{k+a}}{a - a_0} = \left(\frac{\sqrt{k+a}}{a - a_0} - \frac{\sqrt{k+a_0}}{a - a_0} \right) + \frac{\sqrt{k+a_0}}{a - a_0} \Rightarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{k-a}} F_+(a) - \frac{\sqrt{k+a_0}}{a - a_0} = \sqrt{k+a} F_-(a) + \frac{\sqrt{k+a}}{a - a_0} - \frac{\sqrt{k+a_0}}{a - a_0} = w(a) = 0$$

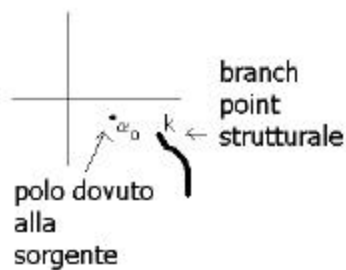
funzione piu'

funzione meno

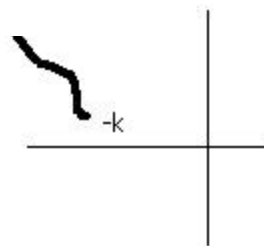
Liouville

Soluzione:

$$F_+(a) = \frac{\sqrt{k-a} \sqrt{k+a_0}}{a-a_0}$$



$$F_-(a) = \frac{1}{\sqrt{k+a}} \left(\frac{\sqrt{k+a}}{a-a_0} - \frac{\sqrt{k+a_0}}{a-a_0} \right)$$



Le incognite $f_+(z)$ e $f_-(z)$ nel dominio naturale z si determinano calcolando gli integrali di antitrasformazione. In questo caso essi si esprimono in forma chiusa e conducono a funzioni di Fresnel. In generale anche se le antitrasformate non possono essere calcolate in forma chiusa esistono due metodi potentissimi che ne consentono il valore approssimato per $|kz| \rightarrow \infty$ (metodo del punto di sella) e per $|kz| \rightarrow 0$ (lemma di Watson o teorema del valore iniziale)

Presentazione delle equazioni Wiener- Hopf

$$G(\mathbf{a})F_+(\mathbf{a}) = F_-(\mathbf{a}) + F_o(\mathbf{a})$$

↑

kernel

↑

sorgente

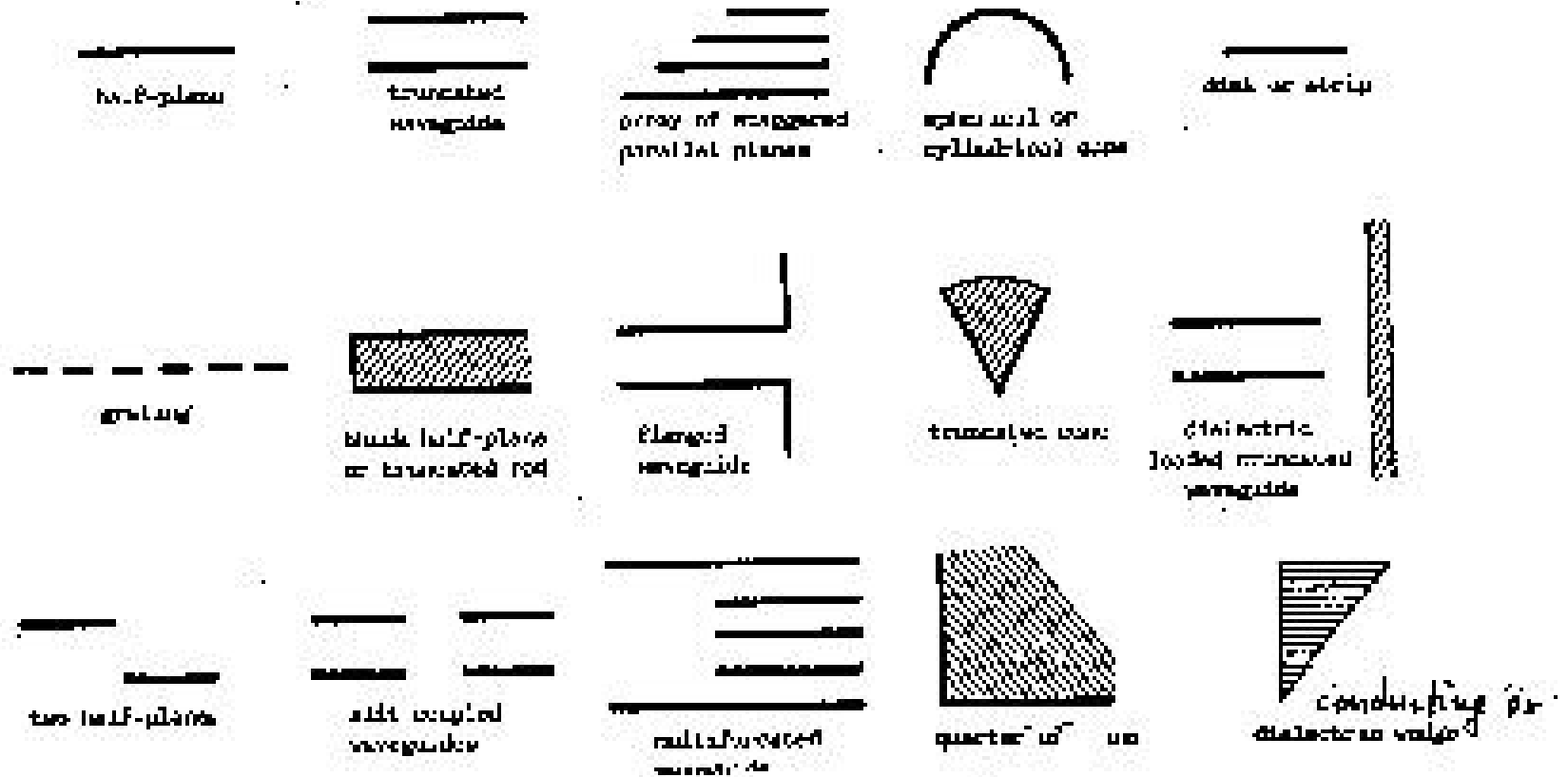
Se non e' indicato altrimenti le incognite + e - sono trasformate di Laplace standard (forma canonica)

- Le equazioni vettoriali W-H sono quelle dove il kernel e' una matrice
- Le equazioni multidimensionali sono quelle dove \mathbf{a} e' un vettore
- Molte volte riconoscere che una equazione funzionale e ' Wiener-Hopf richiede intelligenti elaborazioni matematiche

Le tre fasi della Tecnica Wiener-Hopf

- 1) Deduzione delle equazioni
- 2) Soluzione delle equazioni
- 3) Discussione dei risultati

Il numero dei problemi che consentono l'uso della Tecnica Wiener-Hopf e' impressionante



La deduzione dell'equazioni richiede spesso molta abilita' matematica

La deduzione dell'equazioni Wiener-Hopf richiede abilita' ed esperienza. La deduzione e' molto piu' lunga e difficile nel dominio naturale e pertanto essa verra' fatta solo nel dominio spettrale (Jones).

Esempio solo recentemente (Daniele 2000) si e' riusciti a formulare e risolvere con la tecnica Wiener Hopf il problema del wedge

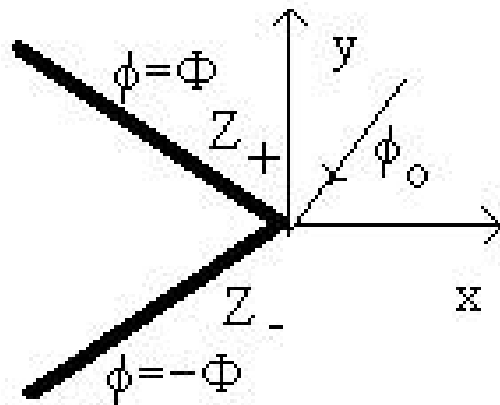


Fig. 7a. Geometry

Si potrebbe aprire uno scenario che consentira' di risolvere nuovi problemi di diffrazione.

Esempi di applicazione ingegneristica:

Effetti sulla telefonia cellulare degli spigoli degli edifici

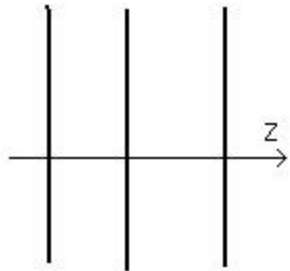
Effetti EMC degli spigoli dei tavoli utilizzati per misure

Nel caso di sorgenti costituite da onde piane aiuta molto il seguente principio:

Le equazioni Wiener-Hopf in forma omogenea ottenute non considerando le sorgenti sono valide anche in presenza di sorgenti costituite da onde piane

Se le discontinuita' geometriche sono disposte in strutture planari stratificate, il metodo simbolico basato su modelli circuitali aiuta moltissimo la deduzione delle equazioni.

Equazioni di Marcuvitz-Schwinger



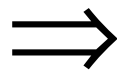
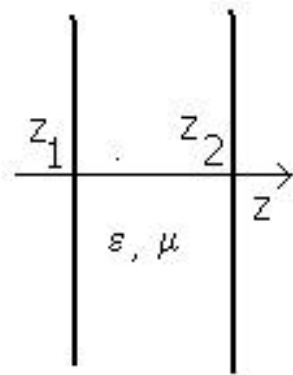
Struttura planare stratificata con strati isotropi

$$\frac{\partial \mathbf{E}_t(x, y, z)}{\partial z} = -j\omega \mathbf{m} \left(\mathbf{1}_t + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \right) \bullet \mathbf{H}_t(x, y, z) \times \hat{z}$$

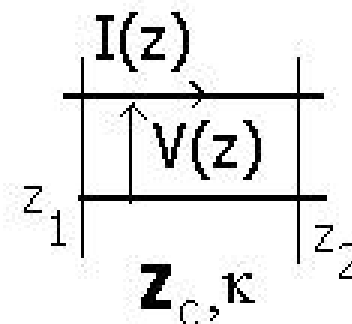
$$\frac{\partial \mathbf{H}_t(x, y, z)}{\partial z} = -j\omega \mathbf{e} \left(\mathbf{1}_t + \frac{1}{k^2} \nabla_t \nabla_t \right) \bullet \hat{z} \times \mathbf{E}_t(x, y, z)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, z) = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{E}_t(x, y, z) e^{j(\mathbf{a} \cdot x + \mathbf{b} \cdot y)} dx dy$$

$$\mathbf{I}(\mathbf{a}, \mathbf{b}, z) = \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{H}_t(x, y, z) \times \hat{\mathbf{z}} e^{j(\mathbf{a} \cdot x + \mathbf{b} \cdot y)} dx dy$$



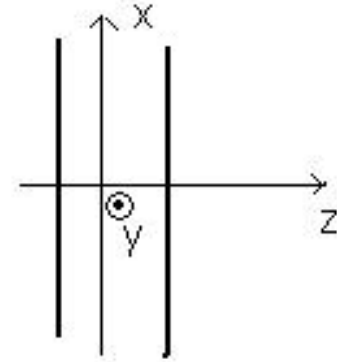
Linea di trasmissione



$$\mathbf{k} = \sqrt{k^2 - \mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2} \quad \mathbf{Z}_c = \frac{1}{\mathbf{w e k}} \begin{vmatrix} k^2 - \mathbf{a}^2 & -\mathbf{a b} \\ -\mathbf{a b} & k^2 - \mathbf{b}^2 \end{vmatrix}$$

Casi particolari

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0 \Rightarrow \mathbf{b} = 0$$



$$TE_{a,0} \Rightarrow E_y, H_x, H_z$$

$$V(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} E_y(x, z) e^{ja_x x} dx, \quad \mathbf{t} = \sqrt{k^2 - \mathbf{a}^2}$$

$$I(\mathbf{a}) = -\int_{-\infty}^{\infty} H_x(x, z) e^{ja_x x} dx, \quad \mathbf{t} = k \text{ per } \mathbf{a} = 0$$

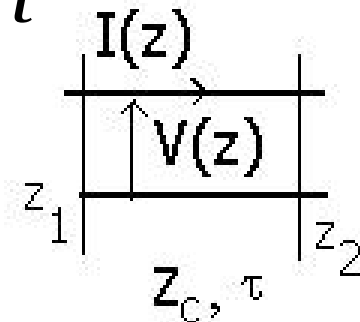
$$Z_c = \frac{w m}{t}$$

$$TM_{a,0} \Rightarrow H_y, E_x, E_z$$

$$V(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} E_x(x, z) e^{ja_x x} dx, \quad \mathbf{t} = \sqrt{k^2 - \mathbf{a}^2}$$

$$I(\mathbf{a}) = \int_{-\infty}^{\infty} H_y(x, z) e^{ja_x x} dx, \quad \mathbf{t} = k \text{ per } \mathbf{a} = 0$$

$$Z_c = \frac{t}{w e}$$



Seconda fase (soluzione dell'equazioni W-H)

La decomposizione si sa sempre fare.

Il problema fondamentale e' la fattorizzazione

STATO DELL'ARTE DELLA FATTORIZZAZIONE PER KERNEL UNIDIMENSIONALI

- Tecnica generale per kernel scalari
- Tecnica generale per matrici triangolari e razionali
- Metodo di Daniele-Khrapkov per una classe importante di matrici
- Tecniche approssimate per alcune classi di matrici

STATO DELL'ARTE DELLA FATTORIZZAZIONE PER KERNEL MULTIDIMENSIONALI

Dramma nella tecnica Wiener-Hopf: Negli 60 era' stata proposta una tecnica (Radlow) che si e' rilevata sbagliata!

Osservazioni

Nonostante le tecniche di fattorizzazione siano molto limitate, il numero di problemi che si sa risolvere in modo chiuso con questa tecnica e' incredibile. In pratica Wiener-Hopf e' il piu' potente metodo per risolvere in forma analitica problemi di diffrazione (ma non solo quelli). Infatti oltre i problemi che si riescono a risolvere **solo** con questa tecnica, essa riesce a risolvere tutti i problemi che storicamente sono stati risolti con altri metodi (esempio wedge).

Ideare nuovi metodi di fattorizzazione significa saper risolvere importanti nuovi problemi finora non risolti. I giovani possono essere scoraggiati dal fatto che ideare nuove tecniche richiede spesso una vita di studi.

La terza fase ingegnerizza le soluzioni esatte.