Diagrammi di Bode

Esempio 5

Punti critici

- Tracciare il diagramma di Bode (solo spettro di ampiezza) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = \frac{s^2 + s}{(s+10)(s^2 + 200s + 10^6)}$$

- Punti critici:

punti critici di zero: $0, \ \omega_1 = 1 \quad (semplici)$

punti critici di poli reali: $\omega_2 = 10 \quad (semplice)$

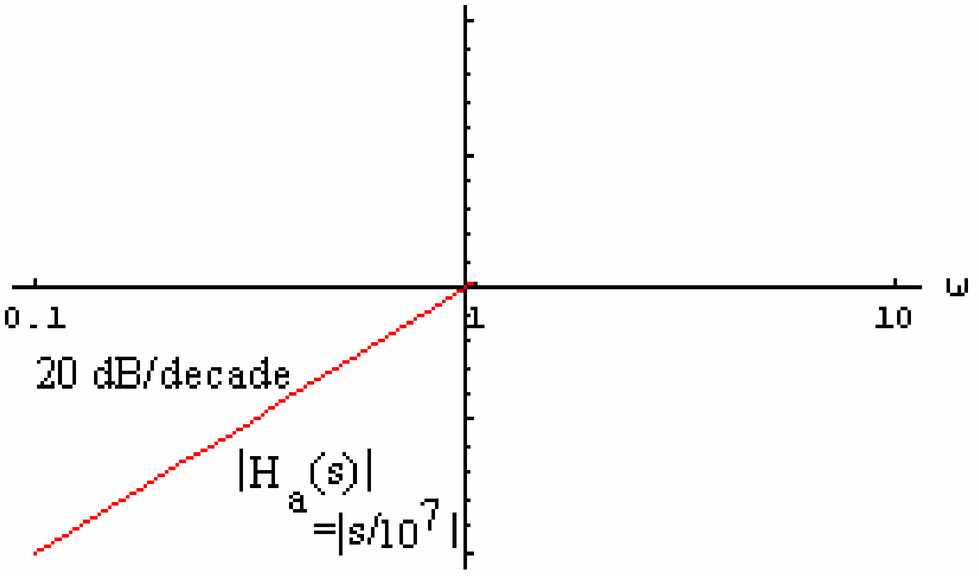
punto critico e smorzamento di poli complessi coniugati:

$$\omega_o = \sqrt{10^6} = 1000, \ \xi = \frac{200}{2\omega_o} = 0.1$$

Maschera a sinistra del punto critico 1

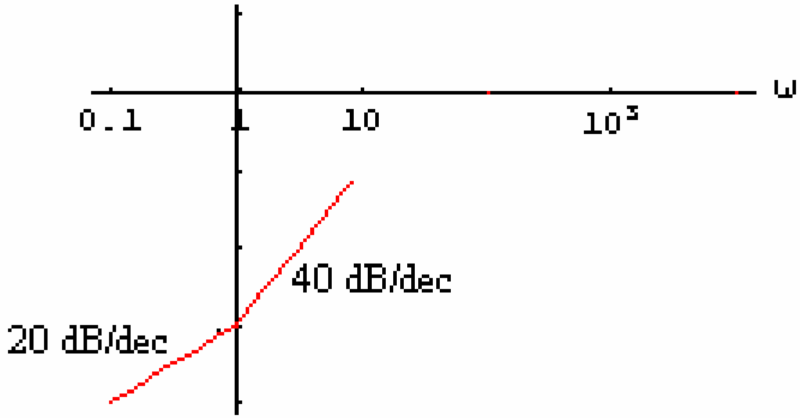
- La maschera a sinistra del primo punto critico non nullo (punto 1) si ottiene approssimando la funzione di trasferimento per valori di s tendenti a zero

$$H_a(s) = H(s)_{s\approx 0} = \frac{s(s+1)}{(s+10)(s^2+200s+10^6)}_{s\approx 0} = \frac{sx1}{10x10^6} = \frac{s}{10^7}$$



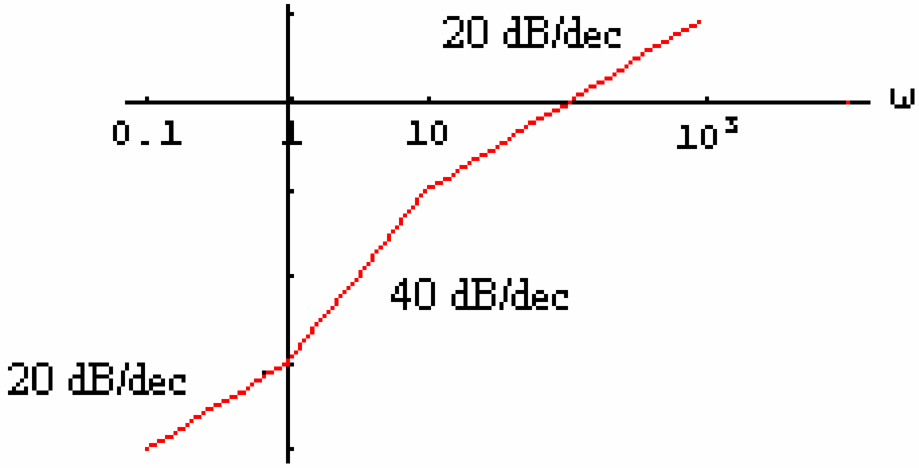
Maschera a destra del punto critico 1

- A sinistra del primo punto critico non nullo 1 la pendenza della maschera è +20dB/dec
  - a destra di 1, per la presenza di un punto critico di zero, la pendenza della maschera deve aumentare di 20 dB/dec e pertanto diventa di 40 dB/dec
  - risulta:



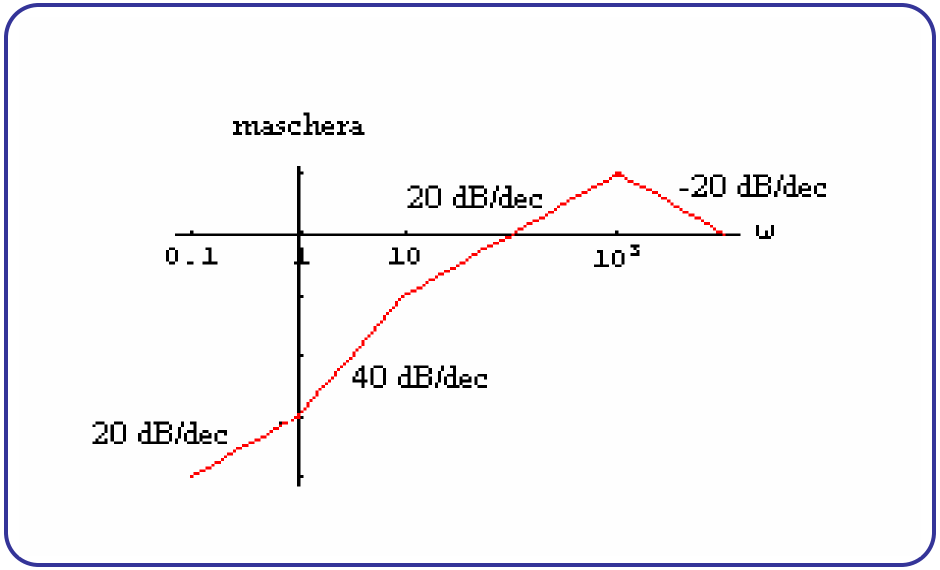
Maschera a destra del punto critico 10

- A sinistra del secondo punto critico non nullo 10 la pendenza della maschera è 40 dB/dec
  - a destra di 10, per la presenza di un punto critico di polo, la pendenza della maschera deve diminuire di 20 dB/dec e pertanto risulta 20 dB/dec



Maschera a destra del punto critico dei poli c.c.

- A sinistra del terzo punto critico 1000 la pendenza della maschera è +20 dB/dec
  - a destra di 200, per la presenza di un punto criticodovuto ad una coppia di poli complessi coniugati, la pendenza della maschera deve diminuire di 40 dB/dec e pertanto risulta – 20 dB/dec

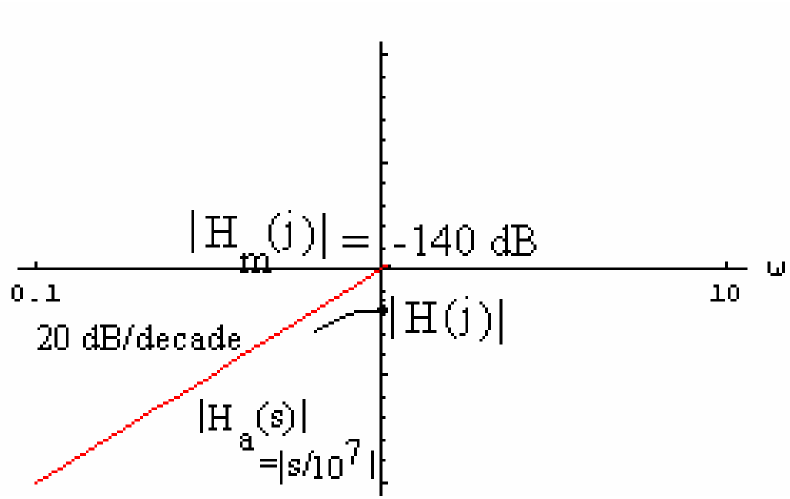


Quotatura della maschera 1/3

- Per pulsazioni a sinistra del primo punto critico 1 la maschera è espressa matematicamente dalla funzione di trasferimento approssimata per valori di s piccoli:

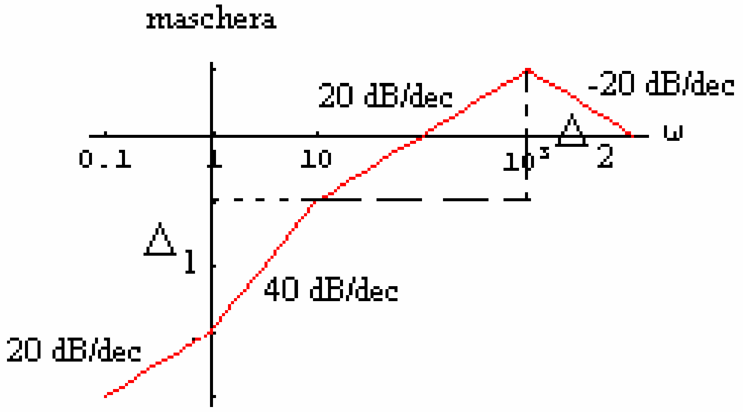
$$H_m(s) = H(s)\Big|_{s\approx 0} = \frac{s}{10^7}$$

- Nel punto critico 1 il valore in dB sulla maschera vale: $20\log_{10}|H_m[j]| = \left.\frac{1}{10^7}\right|_{dB} = -140dB$



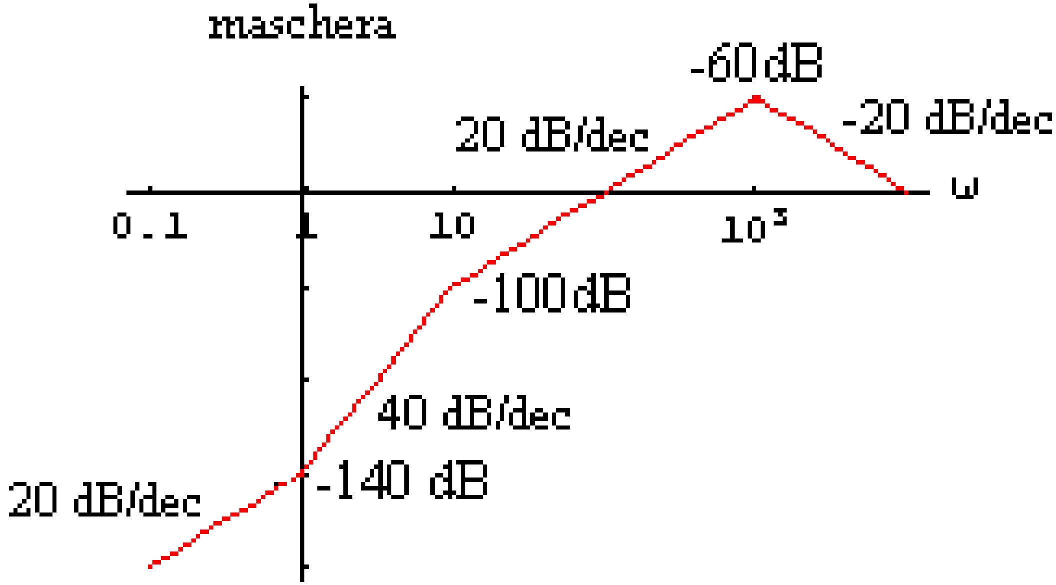
Quotatura della maschera 2/3

- Dal punto critico 1 al punto critico 10 la maschera ha un incremento di $\Delta_1 = 40\log\frac{10}{1} = 40dB$
- Dal punto critico 10 al punto critico 1000 tenendo conto della pendenza di 20 dB/dec un incremento di : $\Delta_2 = 20\log\frac{1000}{10} = 40dB$



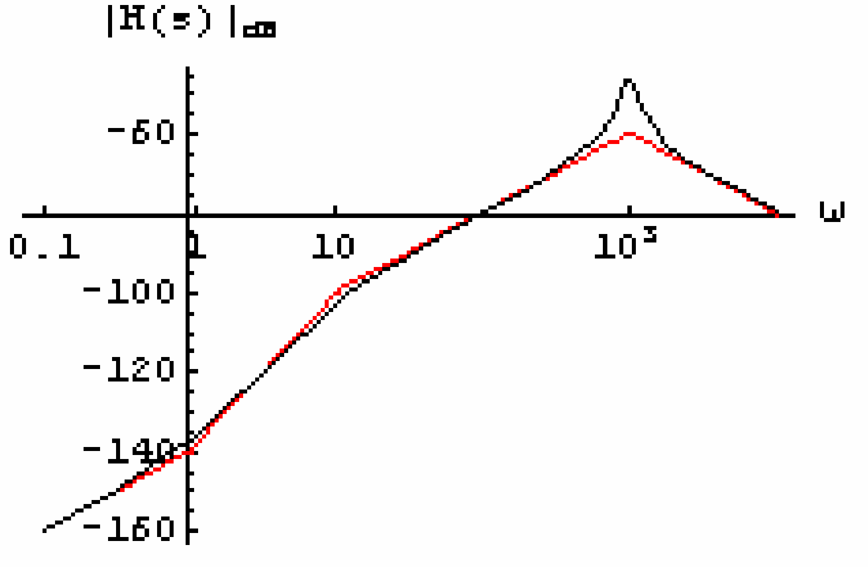
Quotatura della maschera 3/3

- Nei punti critici 1, 10 e 1000 la maschera ha rispettivamente la quota di -140 dB, -100 dB,
- -60 dB



Spettro di ampiezza

- Il diagramma di Bode esatto dello spettro di ampiezza della funzione di trasferimento è riportato in nero nella figura



Stima errore massimo maschera 1/3

- Il punto critico 1 è relativo ad uno zero. L'errore si stima in +3dB:

$$H(j) \approx H_m(j) - 3dB = -140 + 3 = -137dB$$

(valore esatto -137.033 dB)

- Il punto critico 10 è relativo ad uno polo. L'errore si stima in -3dB:

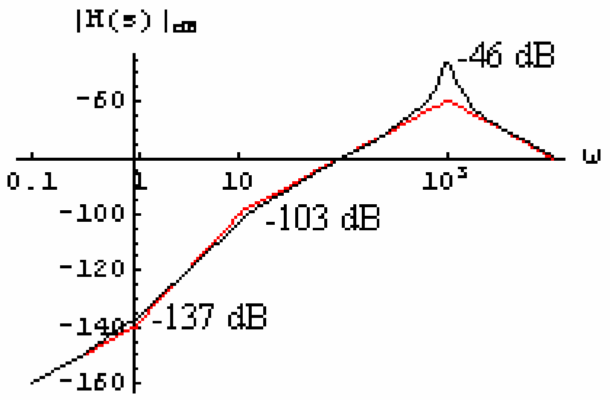
$$H(j10) \approx H_m(j10) - 3dB = -100 - 3 = -103dB$$

(valore esatto -102.966 dB)

Stima errore massimo maschera 2/3

- Il punto critico 1000 è relativo ad una coppia di poli complessi coniugati. L'errore si stima in:

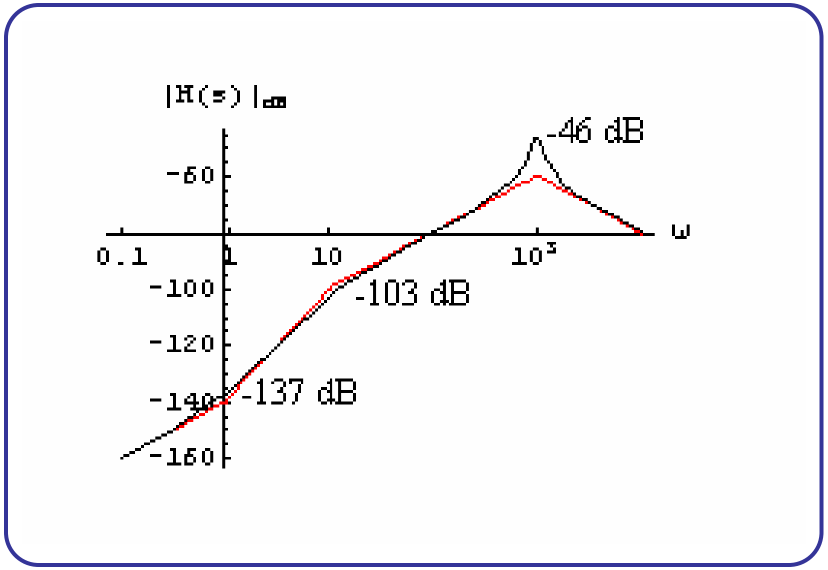
$$\left.\frac{1}{2\xi}\right|_{dB} = \left.\frac{1}{2\times 0.1}\right|_{dB} = 5_{dB} = 14dB$$



Stima errore massimo maschera 3/3

- ne consegue

$$H(j1000) \approx H_m(j1000) + 14dB = -60 + 14 = -46dB \quad \text{(valore esatto -46.021 dB)}$$



Esercizio:

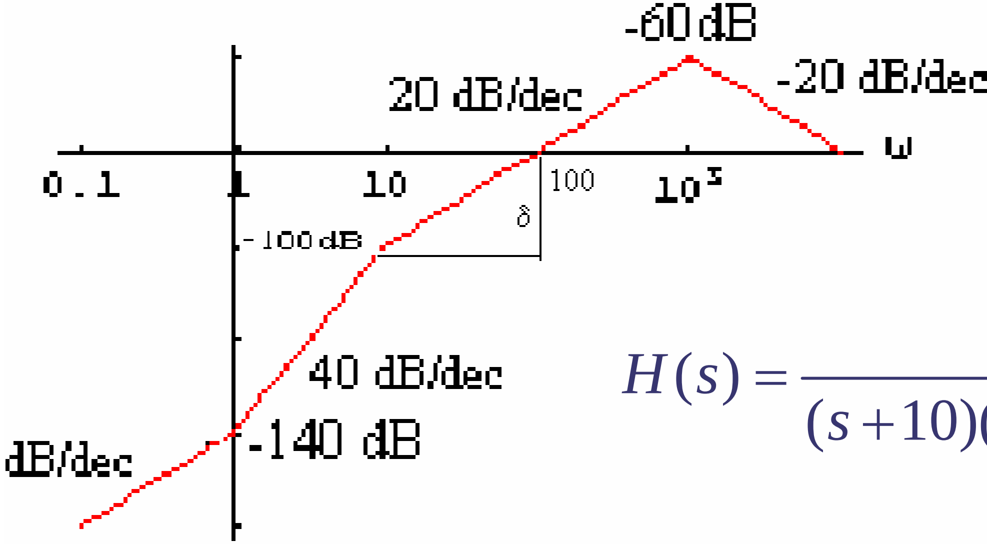
Considerando la funzione di trasferimento dell’esempio precedente:

$$H(s) = \frac{s^2 + s}{(s+10)(s^2 + 200s + 10^6)}$$

stimare il valore efficace dell’uscita quando l’ingresso e’ sinusoidale con pulsazione 100 ed ha un valore efficace di 1000

$$\left(S_e\right)_{dB} = 20\log_{10} 1000 = 60dB$$

Da Bode risulta:



$$H(s)=\frac{s^2+s}{(s+10)(s^2+200s+10^6)}$$

$$\delta = 20\log_{10}\frac{100}{10} = 20dB, \quad \left|H_m(j100)\right|_{dB} = -100+20 = -80dB$$

$$\left(S_e\right)_{dB} = 20\log_{10}1000 = 60dB$$

$$\left(Y_e\right)_{dB} = \left|H_m(j100)\right|_{dB} + \left(S_e\right)_{dB} = -80+60 = -20dB \rightarrow \quad Y_e = \frac{1}{10} = 0.1,$$

$$\mathrm{H(j100)1000} = 1000\frac{(\mathrm{j}100)^2 + j100}{(j100+10)((\mathrm{j}100)^2+200\times j100+10^6} \simeq -6.98\,10^{-6} + 10^{-4}j$$

valore esatto:

$$Y_e = \left|H(j100)\right|1000 = 0.1$$

Diagrammi di Bode

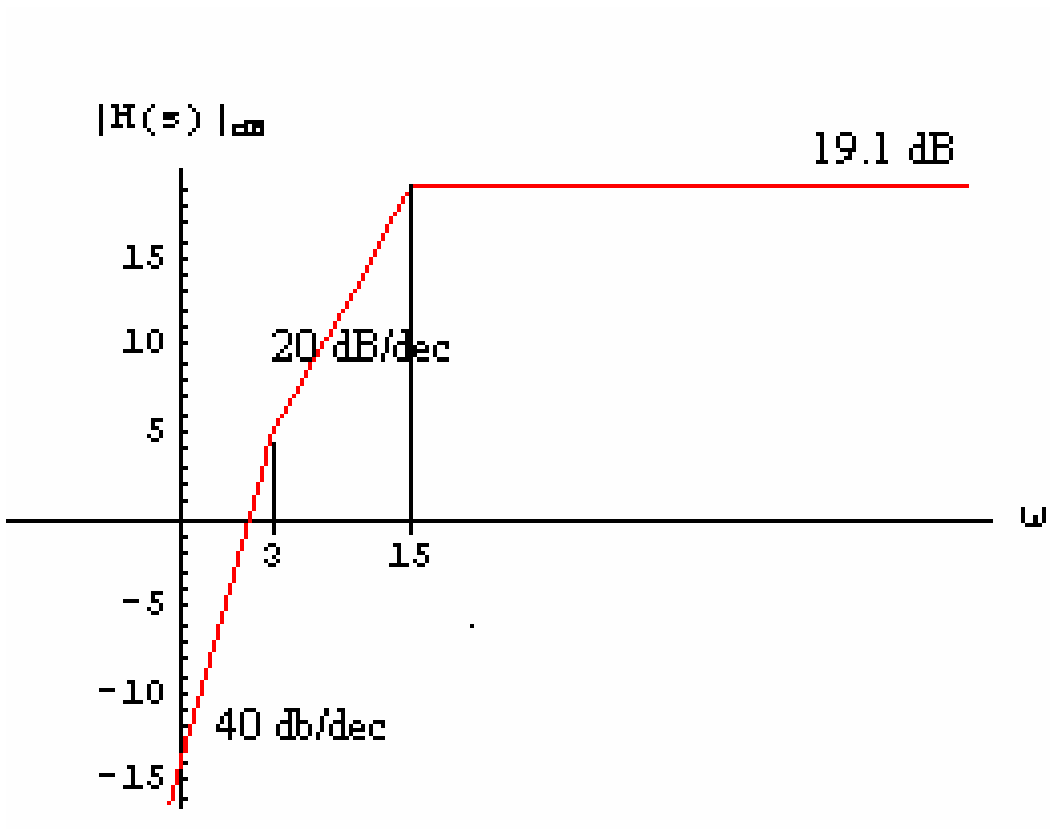
Ricostruzione funzioni di trasferimento

Procedimento

- La maschera di uno spettro di ampiezza può essere alcune volte determinata attraverso misure.
  Con questo dato è possibile risalire alla funzione di trasferimento.

Esempio 1/4

- Determinare la funzione di trasferimento di un circuito sapendo che lo spettro di ampiezza ha la maschera indicata



Esempio 2/4

- I punti critici al finito sono 3 e 15.

- Poichè a destra di 3 e 15 si ha diminuzione di pendenza, detti punti critici sono relativi a poli

- Poichè la discontinuità di pendenza non assume mai il valore di 40dB/dec i punti critici 3 e 15 sono relativi a poli reali

Esempio 3/4

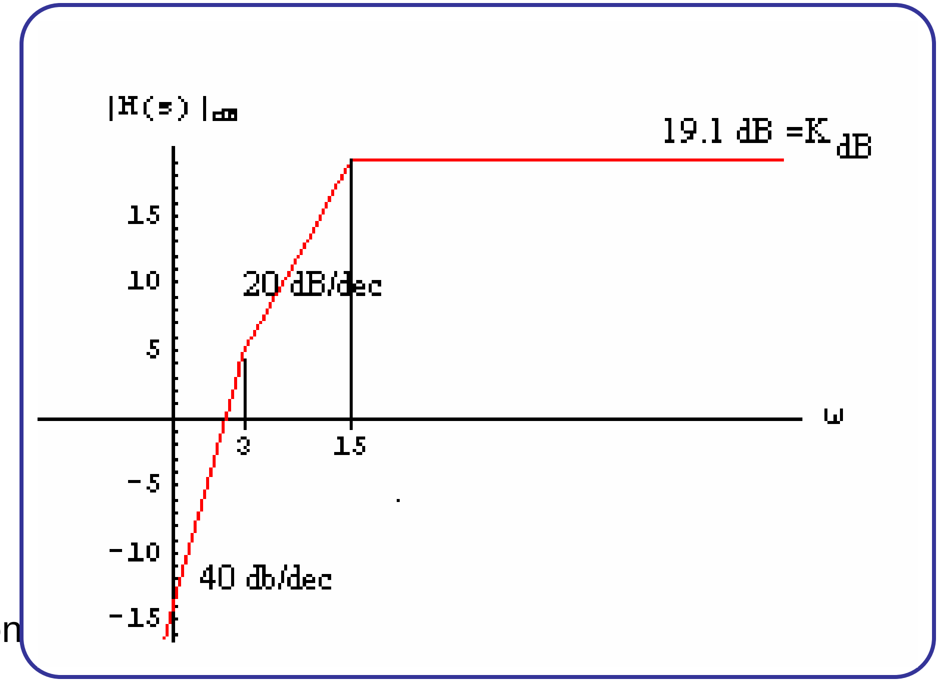
- Poichè al sinistra del primo punto critico finito 3 la pendenza è di 40dB/dec, la funzione di trasferimento presenta s^2 al numeratore:
  - Forma della funzione di trasferimento:

$$H(s) = K\frac{s^2}{(s+3)(s+15)}$$

Esempio 4/4

- Per valori elevati di s si ha:

$$\lim_{s\to\infty}[H(s)] = \lim_{s\to\infty}\left[K\frac{s^2}{(s+3)(s+15)}\right] = K \Rightarrow 19.1dB$$



- Ne consegue:

$$K = 9$$

$$H(s) = 9\frac{s^2}{(s+3)(s+15)}$$

Diagrammi di Bode

Spettri di fase

Espressione della fase 1/3

- Nel seguito discuteremo solo la presenza di zeri o poli semplici in quanto la presenza di zeri o poli multipli significa semplicemente (come avviene per lo spettro di ampiezza) la moltiplicazione per l’ordine di molteplicità

Espressione della fase 2/3

- Dalla funzione di trasferimento:

$$H(s) = K\frac{(s-z_1)(s-z_2)..(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)..(s-p_n)}$$

- Risulta:

$$\begin{aligned}&< H(s) =< K + < (s-z_1) + ...+ < (s-z_m) + \\ &- < (s-p_1) - ....- < (s-p_n)\end{aligned}$$

Espressione della fase 3/3

- La fase della funzione di trasferimento è a meno di un valore costante, la somma delle fasi degli zeri meno la somma delle fasi dei poli

Punti critici

- Anche per gli spettri di fase è importante determinare i punti critici.
  Essi rimangono gli stessi di quelli considerati nel caso di spettri di ampiezza

Assunzioni

- Anche se è possibile tracciare i diagrammi di fase per zeri o poli con parti reali positive, per semplicità saranno considerato solo reti strettamente stabili a fase minima:
  - Zeri e Poli hanno parti reali negative

Maschera degli spettri di fase 1/2

- La scala logaritmica per le ascisse consentirà di approssimare anche gli spettri di fase con delle spezzate.

- La maschera di uno spettro di fase è costitituita dalla spezzata che l’approssima

- Si definiscono due tipi di maschere: una più accurata e l’altra più grossolana

Maschera degli spettri di fase 2/2

- La maschera grossolana si traccia molto velocemente

- Anche se non si possono stimare gli errori la maschera consente di tracciare in modo accurato l’andamento esatto dello spettro di fase

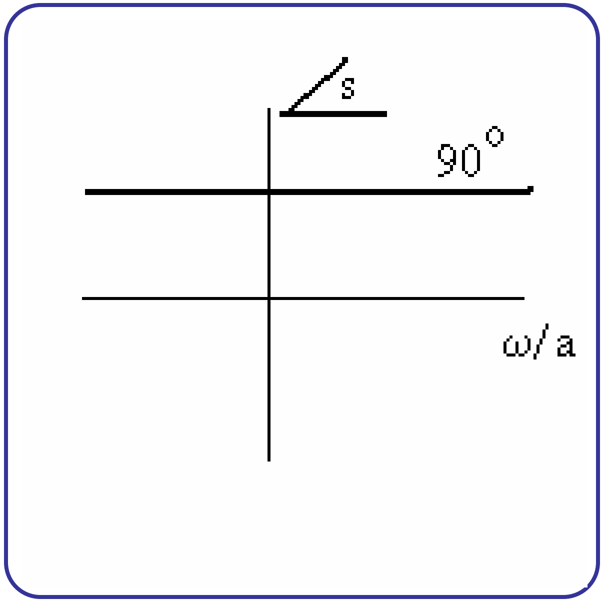
- In pratica la maschera fornisce tutte le informazioni sullo spettro di fase

Spettro di fase di uno zero reale semplice

- Maschera di $\langle (s - z_i)$
  - punto critico a=-z_i

- Caso a=0. Zero nell'origine.

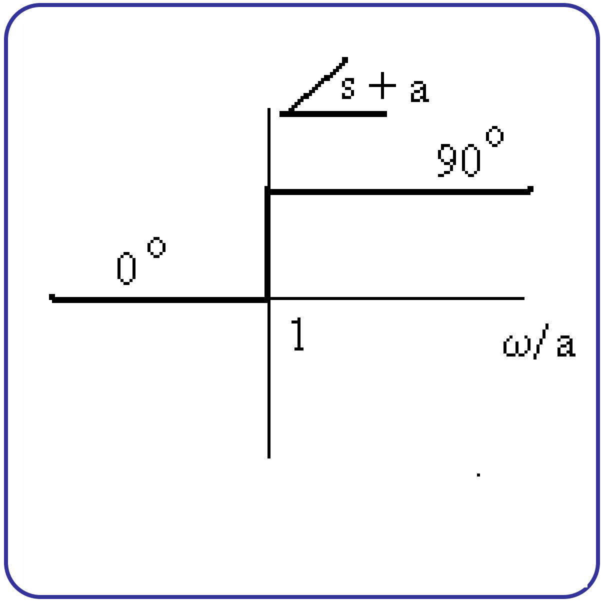
  Risulta: $\langle (j\omega) = 90^o$



- La maschera coincide con il diagramma esatto ed è costituita da una retta orizzontale con il valore dell'ordinata di 90°

Maschera grossolana di uno zero reale semplice

- Maschera di $\angle(s - z_i)$
  - punto critico $a=-z_i$

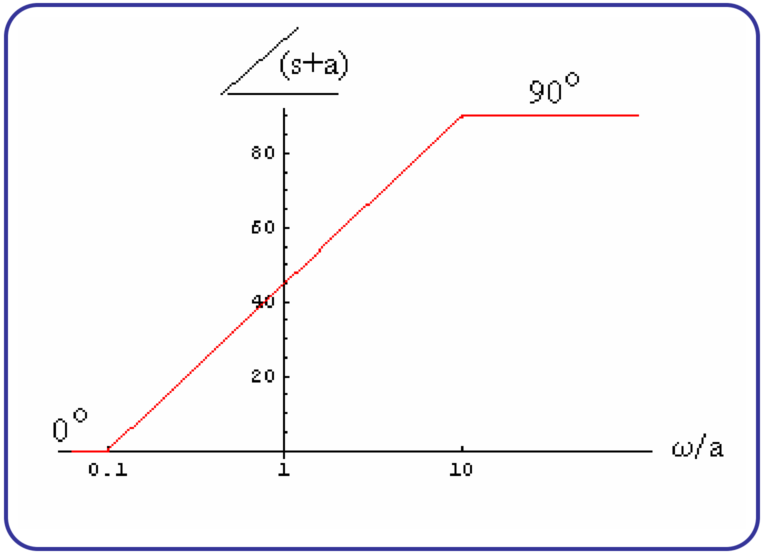


- Per valori piccoli di s la fase è nulla

- Per valori grandi di s la fase vale 90°

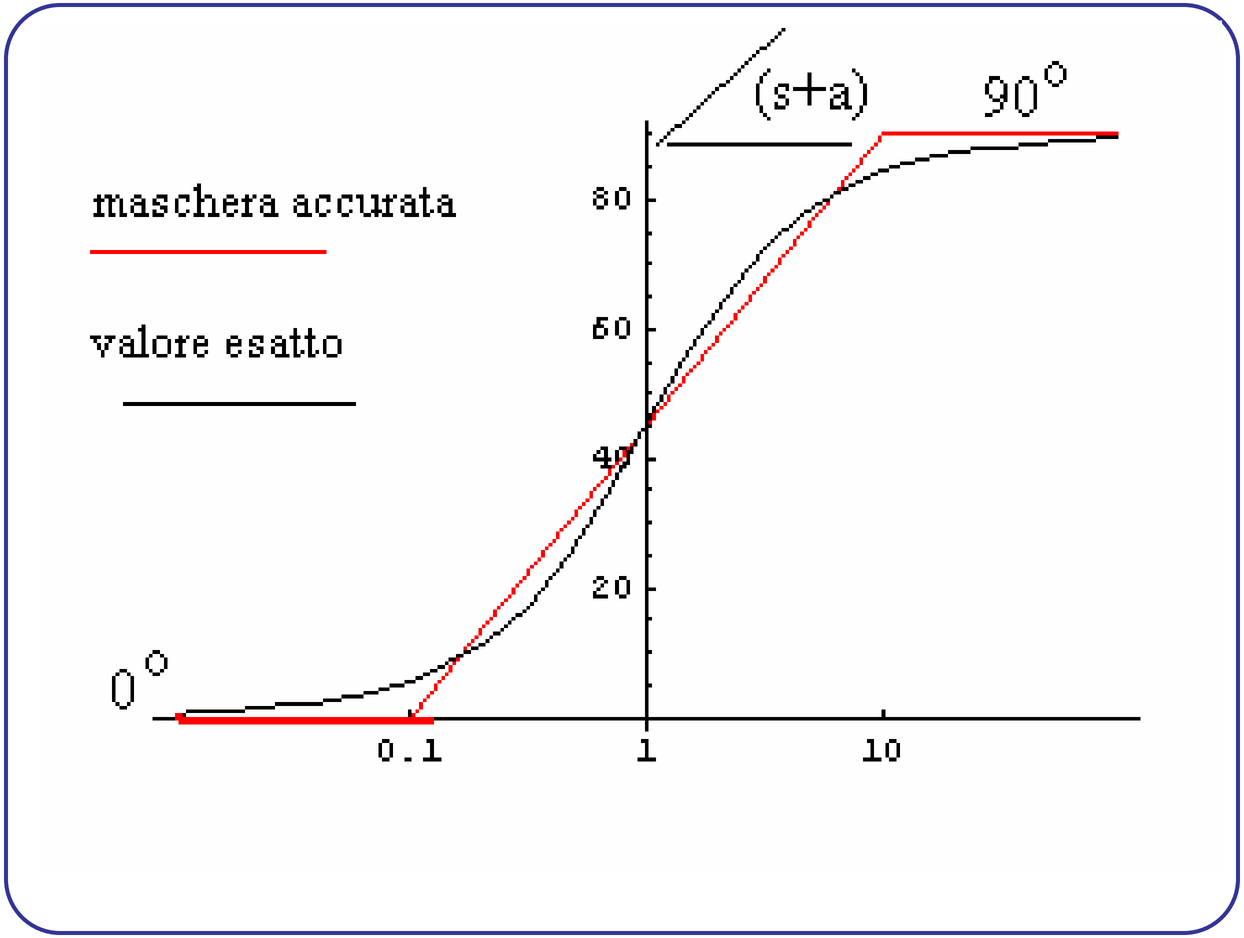
Maschera accurata di uno zero reale semplice

- La maschera è costituita da una spezzata che è:
  - nulla per pulsazioni più piccole di 0.1 a (una decade sotto)
  - 90° per pulsazioni più grandi di 10 a (una decade sopra)
  - il segmento che unisce il punto (0.1 a, 0) con il punto (10 a, 90°) per pulsazioni comprese tra 0.1 e 10 a



Confronto tra valore esatto e maschera

- Maschera di $\angle(s - z_i)$



Spettro di fase di coppia di zeri complessi coniugati

- Una coppia di zeri complessi coniugati implica la presenza al numeratore della funzione di trasferimento del trinomio:

$$s^2 + 2\xi\,\omega_o s + \omega_o^2$$

$$\xi \quad \textit{smorzamento} \qquad 0 < \xi \le 1$$

$$\omega_o \quad \textit{pulsazione}$$

- Una coppia di zeri complessi coniugati introduce un punto critico definito dalla pulsazione ω_o

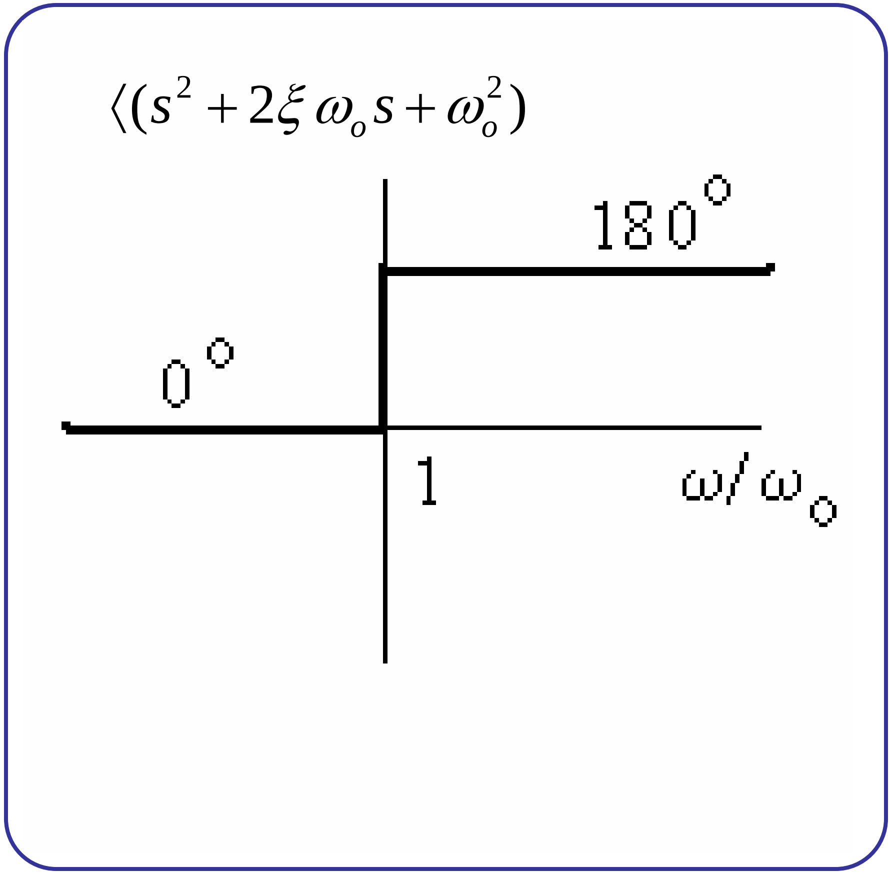
Maschera grossolana di una coppia di zeri c.c

- Maschera di

$\angle(s^2 + 2\xi\,\omega_o s + \omega_o^2)$

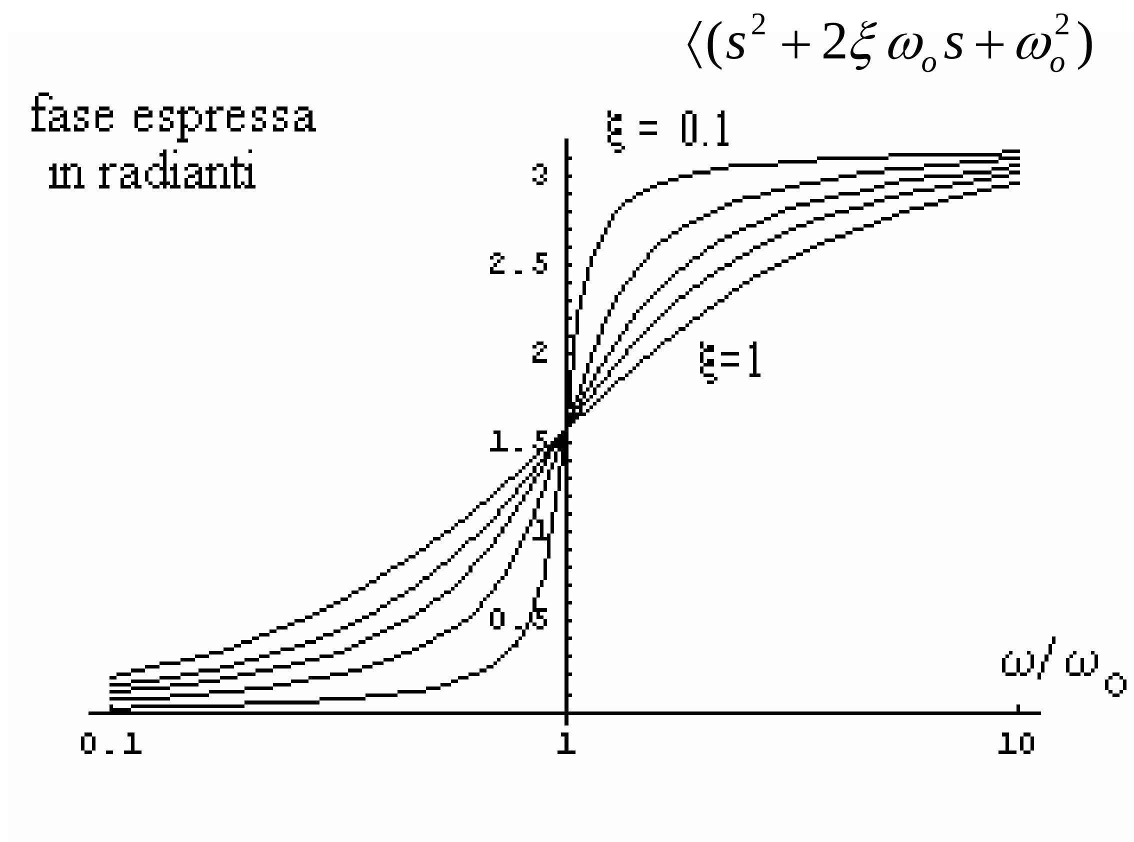
- Per valori piccoli di s la fase è nulla

- Per valori grandi di s la fase vale 180°



Spettro di fase di una coppia di zeri complessi coniugati

- Il valore esatto $\angle(s^2 + 2\xi\,\omega_o s + \omega_o^2)$ dipende dallo smorzamento



Spettri di fase relativi a poli

- Gli spettri di fase relativi ai poli si ottengono con un semplice cambiamento di segno rispetto quelli relativi agli zeri

Diagrammi di Bode

Esempio 6

Funzione di trasferimento che si considera

- Tracciare il diagramma di Bode (spettro di ampiezza e di fase) della funzione di trasferimento:

$$H(s) = -200 \frac{s^2}{s^3 + 14s^2 + 44s + 40}$$

- La determinazione dei poli richiede la soluzione dell'equazione:

$$s^3 + 14s^2 + 44s + 40 = 0$$

Poli

$$H(s) = -200\frac{s^2}{s^3 + 14s^2 + 44s + 40}$$

- Soluzione di: $s^3 + 14s^2 + 44s + 40 = 0$
- Per ispezione una soluzione è s=-2
- Le altre soluzioni si hanno da:

$$\frac{s^3 + 14s^2 + 44s + 40}{s+2} = s^2 + 12s + 20 \quad \Rightarrow s = -2,\ s = -10$$

Punti critici

- Punti critici:

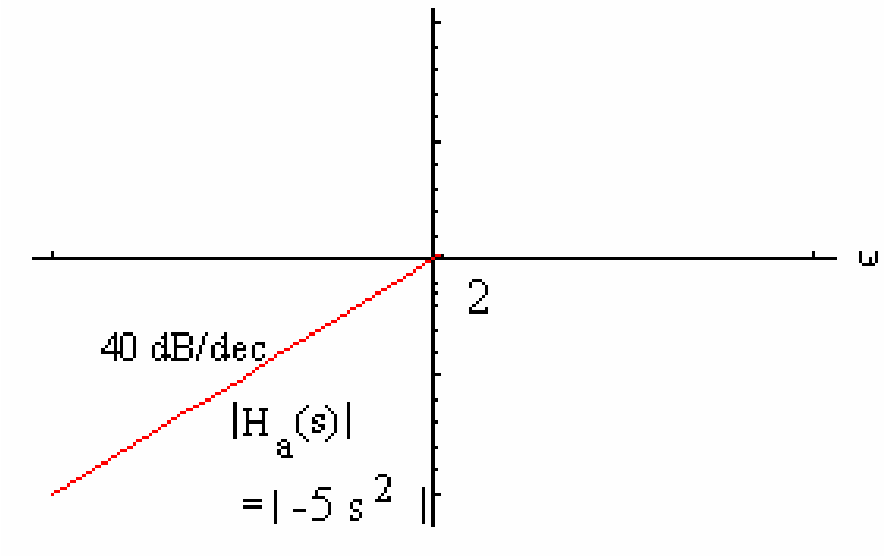
punti critici di zero: $0 \quad (doppio)$

punti critici di polo: $\omega_1 = 2 \quad (doppio), \qquad \omega_2 = 10$

Maschera ampiezza a sinistra del punto critico 2

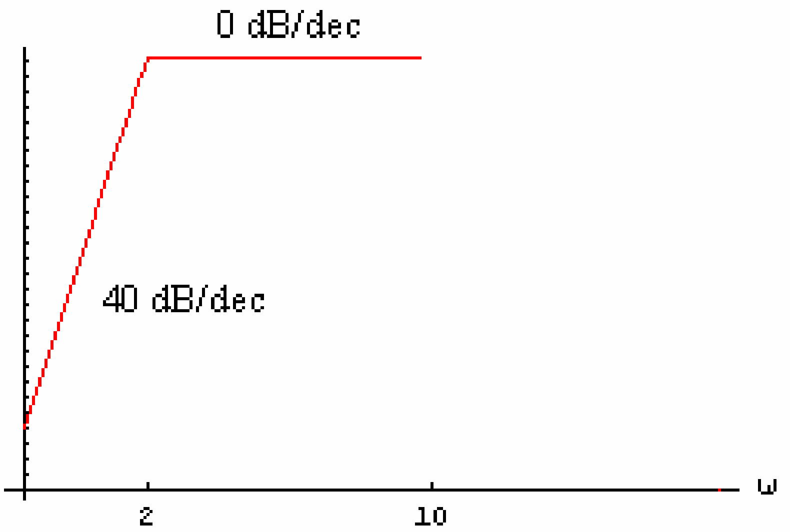
- La maschera a sinistra del primo punto critico non nullo (punto 2) si ottiene approssimando la funzione di trasferimento per valori di s tendenti a zero

$$H_a(s) = H(s)_{s\approx 0} = -200 \left. \frac{s^2}{(s+2)^2(s+10)} \right|_{s\approx 0} = -5s^2$$



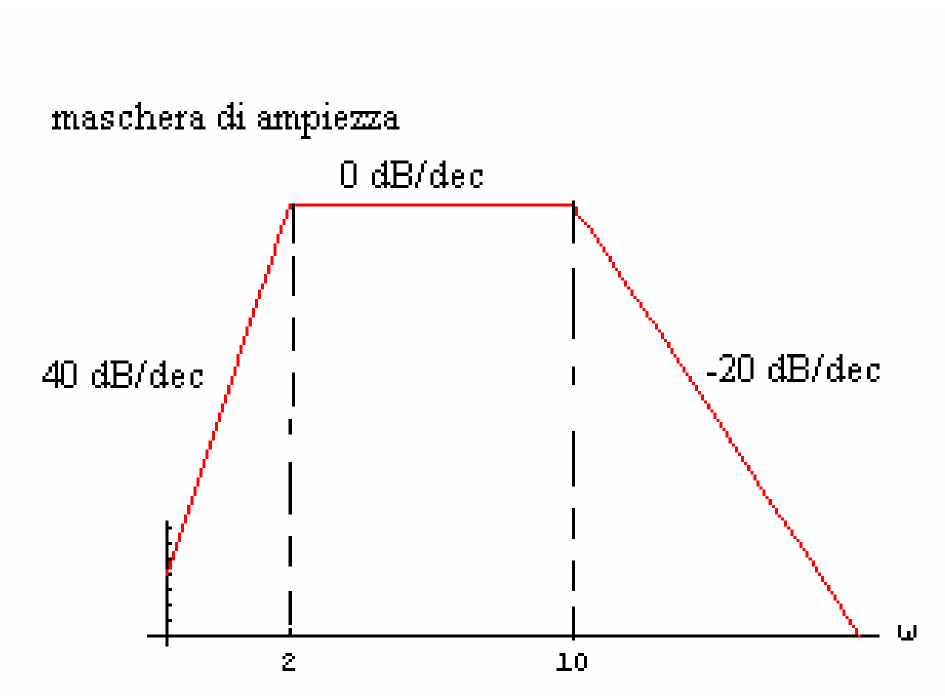
Maschera ampiezza a sinistra del punto critico 10

- A sinistra del primo punto critico non nullo 2 la pendenza della maschera è +40dB/dec
  - a destra di 2, per la presenza di un punto critico di polo doppio, la pendenza della maschera deve diminuire di 40 dB/dec e pertanto è 0 dB/dec



Maschera di ampiezza

- A sinistra del secondo punto critico 10 la pendenza della maschera è nulla
  - a destra di 10, per la presenza di un punto critico di polo, la pendenza della maschera deve diminuire di 20 dB/dec e pertanto risulta -20dB/dec



Quote sulla maschera di ampiezza 1/2

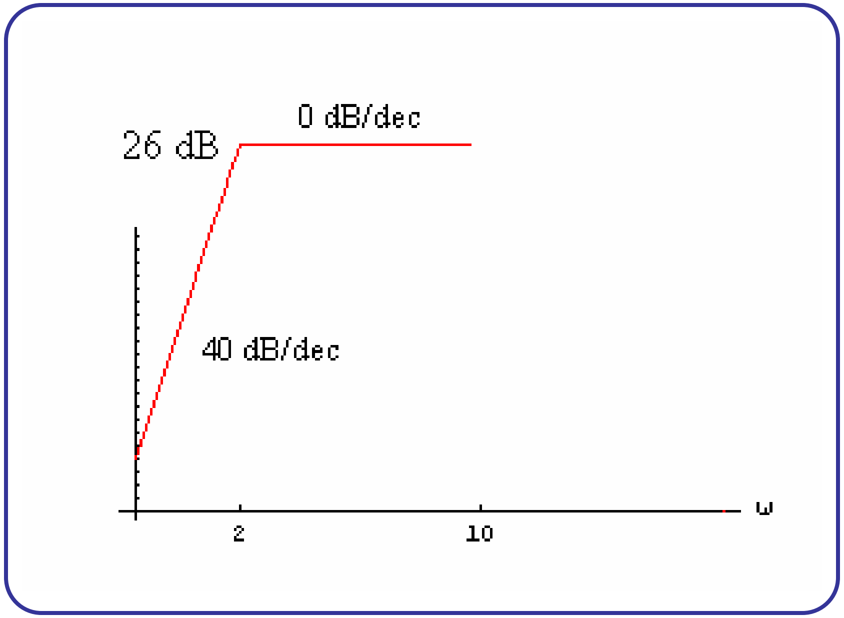
- Per pulsazioni a sinistra del primo punto critico 2 la maschera è espressa matematicamente dalla funzione di trasferimento approssimata per valori di s piccoli:

$$H_m(s) = H(s)\Big|_{s\approx 0} = -5s^2$$

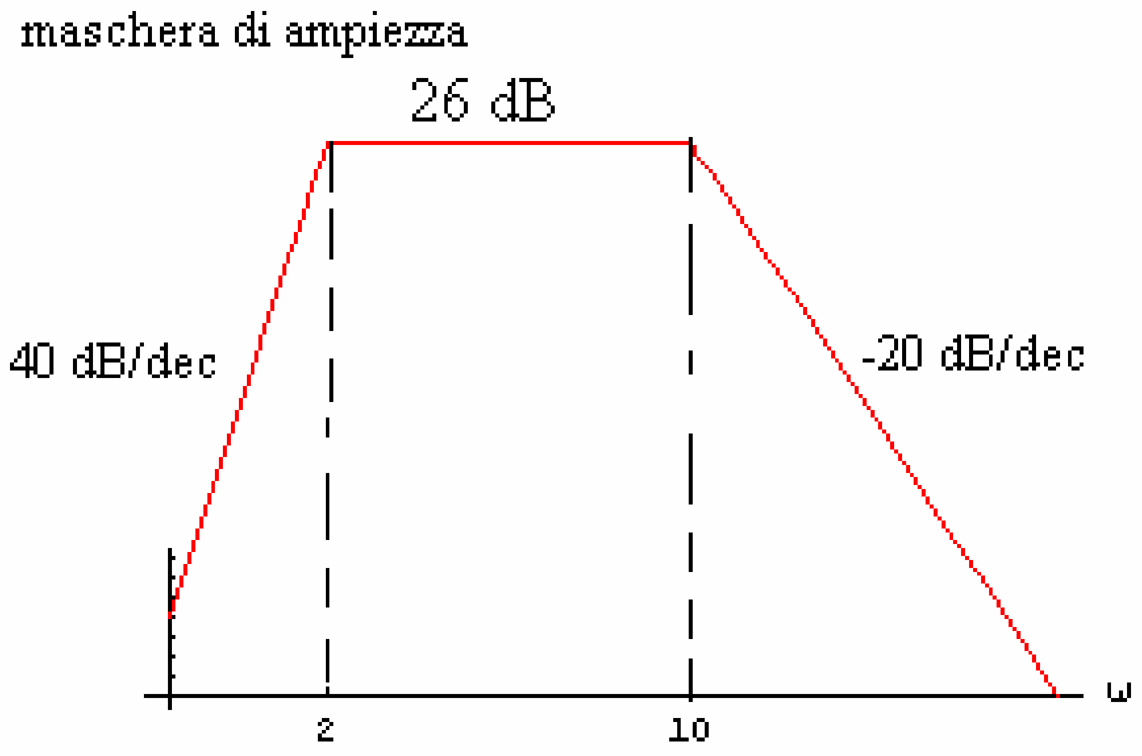
Quote sulla maschera di ampiezza 2/2

- Nel punto critico 2 il valore in dB sulla maschera vale:

$$\left|H_m(j2)\right| = \left|-5(j2)^2\right| = 20 \Rightarrow 26\,dB$$

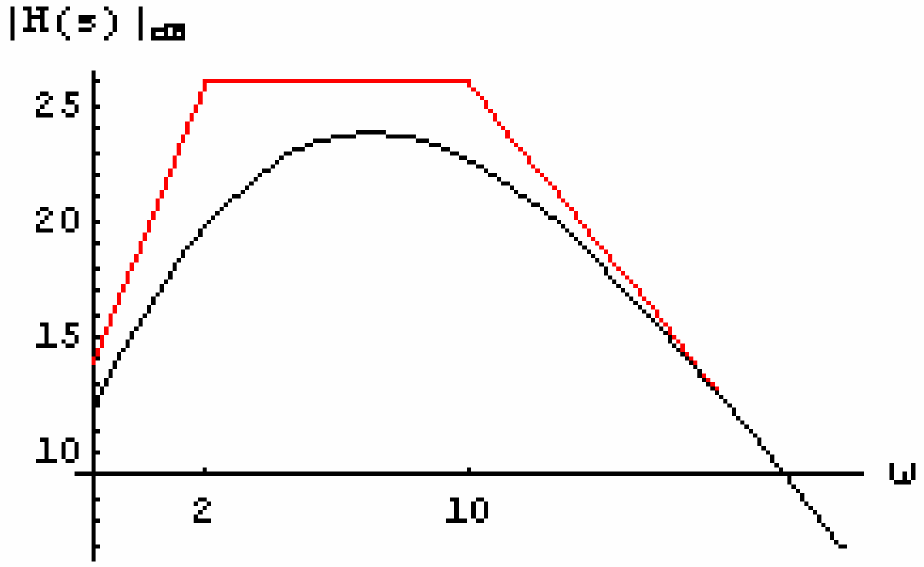


Maschera di ampiezza definitiva



Spettro di ampiezza

- Lo spettro di ampiezza della funzione di trasferimento è riportato in nero nella figura



Stima errore ampiezza 1/2

- Il punto critico 2 è relativo ad un polo doppio. L'errore si stima in - 6 dB:

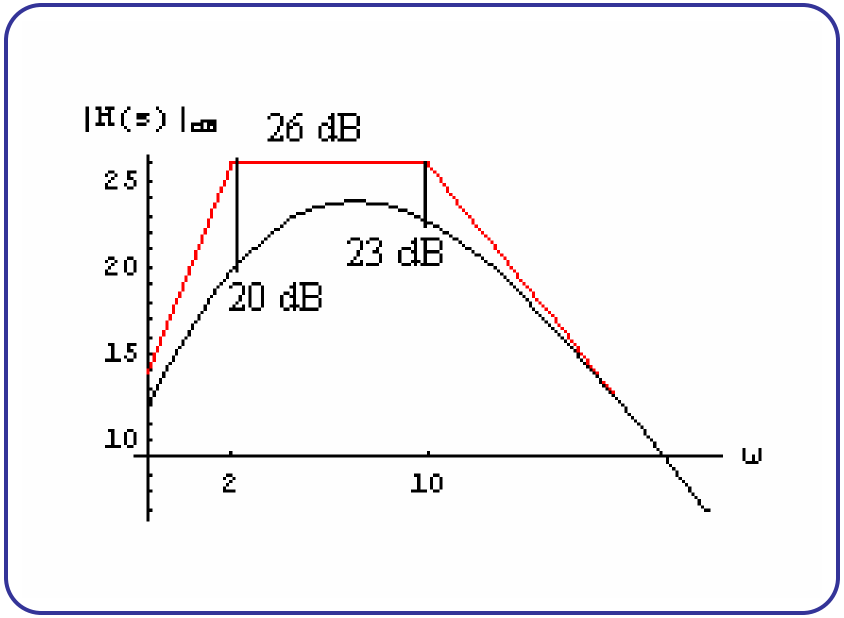
$$H(j2) \approx H_m(j2) - 6dB = 26 - 6 = 20dB$$

(valore esatto 19.83 dB)

Stima errore ampiezza 2/2

- Il punto critico 10 è relativo ad uno polo. L'errore si stima in - 3 dB:

$$H(j10) \approx H_m(j10) - 3dB = 26 - 3 = 23dB \quad \text{(valore esatto 22.67 dB)}$$



Maschera fase a sinistra del punto critico 2

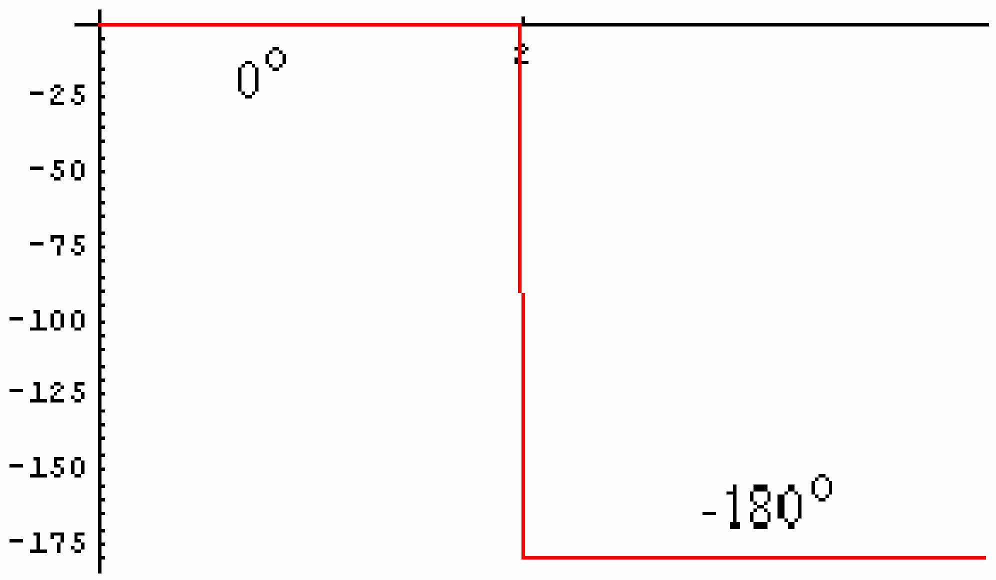
- La maschera a sinistra del primo punto critico non nullo (punto 2) si ottiene approssimando la funzione di trasferimento per valori di s tendenti a zero

$$H_a(s) = H(s)_{s\approx 0} = -200\left.\frac{s^2}{(s+2)^2(s+10)}\right|_{s\approx 0} = -5s^2$$

$$\angle(-5s^2) = \angle(5\omega^2) = 0$$

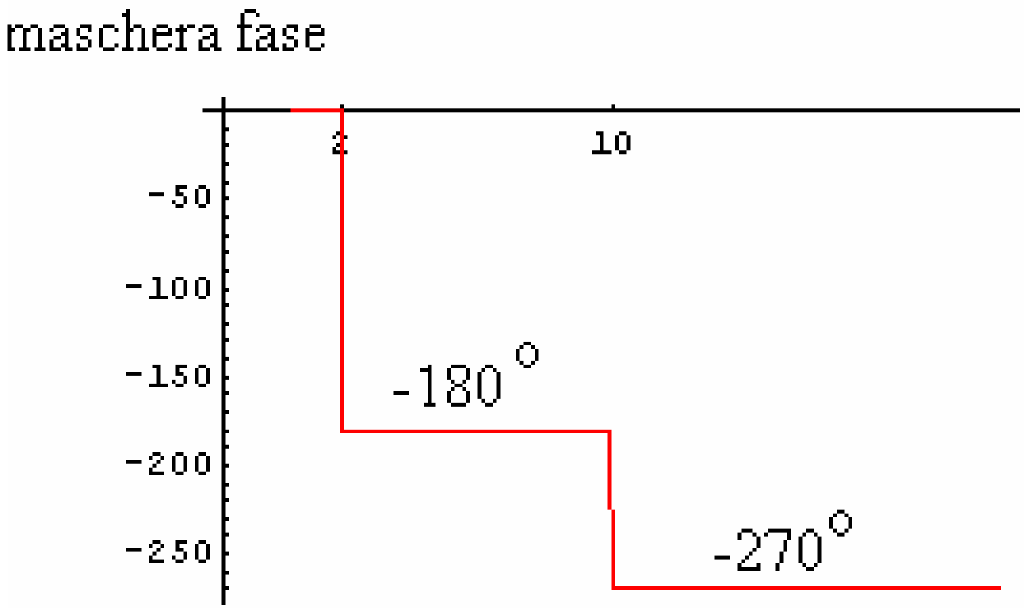
Maschera fase a sinistra del punto critico 10

- A sinistra del punto critico 2 la fase è zero
  - a destra di 2, per la presenza di un punto critico di polo doppio, la fase deve diminuire di 180º e pertanto vale -180º



Maschera di fase

- A sinistra del secondo punto critico 10 la fase vale -180º.
  - a destra di 10, per la presenza di un punto critico di polo, la fase deve diminuire di 90º e pertanto risulta – 270º



Spettro di fase