Soluzione di un sistema di eq. differenziali lineari omogenee di ordine 1.

$\dot{\underline{X}} = \underline{A}\,\underline{X}$ Cerco una soluzione del tipo $\underline{X} = e^{\lambda t}\underline{V}$

$$\dot{\underline{X}} = \frac{d}{dt} e^{\lambda t}\underline{V} = \lambda e^{\lambda t}\underline{V}$$

$$\underline{A}\underline{X} = \underline{A}\left(e^{\lambda t}\underline{V}\right) = e^{\lambda t}\underline{A}\underline{V}$$

Quindi $e^{\lambda t}\underline{V}$ è una soluzione, se e solo se $\lambda e^{\lambda t}\underline{V} = e^{\lambda t}\underline{A}\underline{V}$. Semplificando, si ottiene

$$\underline{A}\underline{V} = \lambda\underline{V}$$

Soluzione banale: $\underline{V}=0$, che scartiamo.
Per avere soluzioni diverse da $\underline{V}=0$, riscrivo il sistema nella forma:

$$\underline{A}\underline{V} - \lambda\underline{V} = 0 \quad , \quad \left(\underline{A} - \lambda\underline{I}\right)\underline{V} = 0$$

Ho soluzioni diverse dalla nulla se e solo se

$$\det\left(\underline{A} - \lambda\underline{I}\right) = 0$$

I valori di λ che soddisfano questa equazione sono chiamati autovalori. I vettori $\underline{V}$ corrispondenti sono chiamati autovettori

Se la matrice $\underline{A}\,(n\times n)$ ha n autovettori linearmente indipendenti, allora la sua soluzione generale è data da:

$$\underline{X}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}\underline{V}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t}\underline{V}_2 + \dots c_n e^{\lambda_n t}\underline{V}_n$$

Se gli n autovalori sono distinti, allora gli n autovettori sono linearmente indipendenti

Caso di un sistema di ordine 2:

$$\underline{\dot{x}} = \underline{A}\,\underline{x} \qquad \underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix}$$

▶ Esempio

$$\underline{\dot{x}} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \underline{x}$$

- Autovalori:

$$\det\left[\underline{A} - \lambda \underline{I}\right] = 0 \qquad \det\begin{bmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$(3+\lambda)^2 - 1 = 0 \qquad \lambda^2 + 6\lambda + 8 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = -2\,,\ -4 \qquad \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = -4$$

- Autovettori

$$\underline{A}\,\underline{v}_1 = \lambda_1 \underline{v}_1 \qquad \left(\underline{A} - \lambda_1 \underline{I}\right)\underline{v}_1 = 0 \quad \text{con } \underline{v}_1 = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix}$$

$$\left(\underline{A} - \lambda_1 I\right)\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} -3+2 & 1 \\ 1 & -3+2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} -v_1' + v_2' = 0 \\ v_1' - v_2' = 0 \end{cases}$$

Chiaramente le due eq. sono linearmente dipendenti, come deve essere, essendo $\det(\underline{A} - \lambda \underline{I}) = 0$.

Assumo $v_1' = 1$ e ottengo $v_2' = 1$; quindi

$$\underline{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calcolo l'autovettore associato a λ_2:

$$\underline{A}\,\underline{V}_2 = \lambda_2 \underline{V}_2$$

$$\begin{bmatrix} -3+4 & 1 \\ 1 & -3+4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'' \\ v_2'' \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{cases} v_1'' + v_2'' = 0 \\ v_1'' + v_2'' = 0 \end{cases}$$

$$v_1'' = 1, \quad v_2'' = -1$$

$$\underline{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

La soluzione generale del sistema è

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 e^{\lambda_1 t} \underline{V}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \underline{V}_2$$

c_1 e c_2 vanno scelti in modo da soddisfare la condizione iniziale $x(t_0) = \underline{x}_0$

Si noti che, se $\underline{A}$ è simmetrica, come in questo caso, allora gli autovettori formano una base ortonormale. Tuttavia, per formare una base, non è necessario che gli autovettori siano ortonormali: basta che siano linearmente indipendenti

Altro esempio

$$\underline{\dot{X}} = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \underline{X} \qquad X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Soluzione:

$$\underline{X}(t) = \frac{1}{2} e^{7t} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} e^{-5t} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{7t} - e^{-5t} \\ \frac{1}{2} e^{7t} + \frac{1}{2} e^{-5t} \end{bmatrix}$$