

QUALI SONO LE CONDIZIONI AFFINCHÉ
LE EQUAZIONI CHE DESCRIVONO IL
CIRCUITO ABBIANO SOLUZIONE UNICA?

CONSIDERIAMO LA SEGUENTE FORMA
(detta NORMALE) delle EQUAZIONI DI
STATO

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t)$$

$$x \in \mathbb{R}^n$$
$$f(\cdot, \cdot): \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$$

⇓

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = f_1(x_1, \dots, x_n, t) \\ \frac{dx_2}{dt} = f_2(x_1, \dots, x_n, t) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = f_n(x_1, \dots, x_n, t) \end{array} \right.$$

Teorema (Esistenza ed unicità locali)¹

Si consideri una funzione $f(x, t)$ continua a tratti in t e soddisfacente alla condizione di Lipschitz (locale)

$$\|f(x_2, t) - f(x_1, t)\| \leq L\|x_2 - x_1\| \quad (1)$$

$$\forall x_1, x_2 \in B = \{x \in R^n \mid \|x - x_0\| \leq r\}, \quad \forall t \in [t_0, t_1].$$

Allora esiste un $\delta > 0$ tale che l'equazione di stato

$$\dot{x} = f(x, t), \quad \text{con } x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

ha una soluzione unica nell'intervallo $[t_0, t_0 + \delta]$.

Tale soluzione è spesso chiamata **traiettoria** ed indicata con il simbolo

$$\Phi(t, x_0, t_0) \quad (3)$$

Ovviamente in $[t_0, t_0 + \delta]$ la traiettoria Φ soddisfa ai vincoli seguenti:

$$\Phi(t_0, x_0, t_0) = x_0 \quad (4)$$

$$\frac{d}{dt}\Phi(t, x_0, t_0) = f(\Phi(t, x_0, t_0), t) \quad (5)$$

Proprietà

Valgono le proprietà seguenti (Hasler, Neiryneck, p.82):

1. Una funzione che è localmente di Lipschitz in un punto, è continua in quel punto
2. Una funzione che ha derivate parziali continue in un punto, è localmente di Lipschitz in quel punto

Note

Il teorema esprime una condizione sufficiente ed è un teorema locale, poiché garantisce esistenza ed unicità solo su un intervallo finito $[t_0, t_0 + \delta]$, potendo δ essere anche molto piccolo. In altre parole, il teorema non afferma che la soluzione esiste per ogni istante di tempo, ma si limita a garantirne l'esistenza e l'unicità in un intorno di t_0 .

In generale si può provare che c'è un massimo intervallo $[t_0, T]$ su cui esiste l'unica soluzione passante per (t_0, x_0) .

Aggiungendo ulteriori condizioni a quelle del precedente teorema (che sostanzialmente si traducono nel chiedere che $f(x, t)$ sia *globalmente* Lipschitz, cioè in tutto R^n) si può dimostrare l'esistenza e unicità della soluzione in un intervallo $[t_0, t_1]$, con t_1 arbitrariamente grande.

Tuttavia la condizione di essere *globalmente* Lipschitz è restrittiva ed infatti esistono molti modelli di sistemi fisici reali che non la soddisfano, pur fornendo un'unica soluzione globale.

Per questo motivo ci si limita a considerare solamente il teorema enunciato in precedenza, che è sufficiente per la maggior parte delle applicazioni.

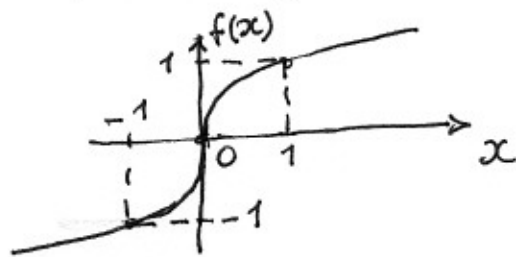
¹Khalil, Theorem 2.2, p.74

► Commenti

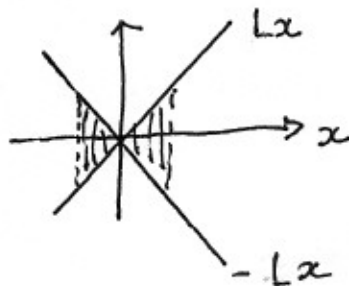
- Una funzione che è localmente di Lipschitz in un intorno di un punto è continua in quel punto, ma non è vero il contrario: una funzione può essere continua in un punto, ma non essere Lipschitz in un intorno di quel punto.

Esempio

$$f(x) = \operatorname{sgn}(x) \sqrt{|x|}$$



La funzione è continua in $x=0$, ma non è localmente Lipschitz. Infatti, in un intorno di $x=0$ il grafico di $f(x)$ dovrebbe essere compreso tra due rette $\pm Lx$, il che è impossibile per ogni L finito

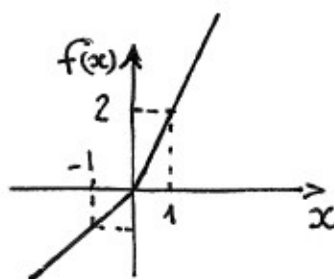


Detto in altri termini il vincolo per una funzione di essere Lipschitz è più forte della condizione di continuità

- Una funzione derivabile è Lipschitz, ma non è vero il contrario: una funzione può essere non derivabile in un punto, ma essere comunque Lipschitz in quel punto.

Esempio

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{per } x < 0 \\ 2x & \text{per } x > 0 \end{cases}$$



La disuguaglianza

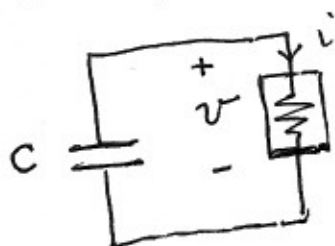
$$|f(x_2) - f(x_1)| \leq 2 |x_2 - x_1|$$

è verificata in un intorno di $x=0$, quindi $f(x)$ è Lipschitz in 0, anche se non è ivi derivabile.

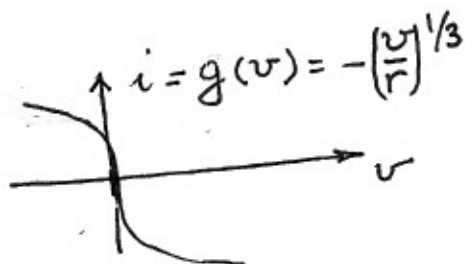
Detto in altri termini: il vincolo di essere Lipschitz è più debole del vincolo di derivabilità.

- La continuità di f è sufficiente ad assicurare l'esistenza della soluzione, ma non la sua unicità.

Esempio

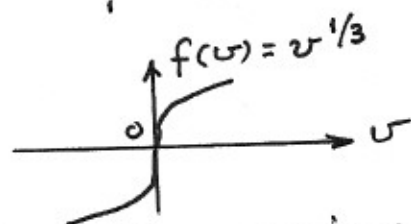


$$v = -ri^3$$



$$i = -C \frac{dv}{dt}, \text{ ma } i = -\left(\frac{v}{r}\right)^{1/3} \text{ e quindi}$$

$$C \frac{dv}{dt} = \left(\frac{v}{r}\right)^{1/3} = f(v)$$



Supponendo $C=1$ e $r=1$, si ottiene l'equazione

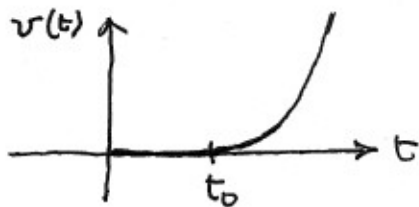
$$\frac{dv}{dt} = v^{1/3} \quad (1)$$

Cercando le soluzioni con condizione iniziale $x_0=0$, si ottiene che una soluzione ovvia è $v(t) \equiv 0$.

In aggiunta alla soluzione ovvia $v(t) \equiv 0$, si hanno però altre soluzioni date da

$$v(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t \leq t_0 \\ \left[\frac{2}{3}(t-t_0)\right]^{3/2} & \text{per } t > t_0 \end{cases} \quad (2)$$

come si può agevolmente verificare valutando ambo i membri della (1) e usando la (2)



- Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\dot{x} = 1 + x^2, \quad x(0) = x_0 = 0$$

$f(x)$ è continua ed è Lipschitz nell'intorno di x_0 .
La soluzione esiste ed è unica, ma non ci sono
garanzie che la soluzione esista per ogni $t > 0$;
sappiamo che esiste in un intorno di $t = 0$.

Separo le variabili:

$$\frac{dx}{1+x^2} = dt$$

Integro ambo i membri

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int dt \quad \rightarrow \quad \arctg x = t + C$$

Ora $x_0 = 0$ porta a $C = \arctg 0 \rightarrow C = 0$

Quindi la soluzione è $t = \arctg x$, che
porta a

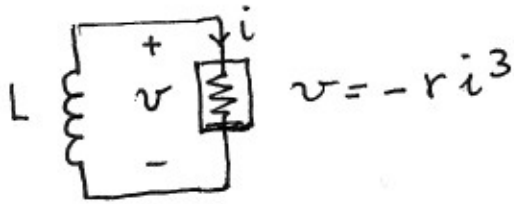
$$x(t) = \operatorname{tg}(t)$$

Questa soluzione è definita solo per $-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$

Fuori di questo intervallo non si hanno soluzioni.

Si osserva che il sistema ha una soluzione
che raggiunge ∞ in un tempo finito (blow-up
phenomen)

- Altro esempio di blow-up phenomenon
(Hasler-Neirynck, ex. 2.2.10, p. 88)



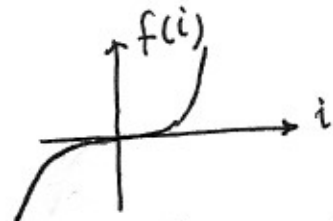
L'equazione differenziale è

$$v = -L \frac{di}{dt} ; \quad -ri^3 = -L \frac{di}{dt} \quad \frac{di}{dt} = \frac{r}{L} i^3$$

Assumo $r=1, L=1$ e $i(0) = i_0 > 0$

L'eq. assume la forma

$$\frac{di}{dt} = i^3$$



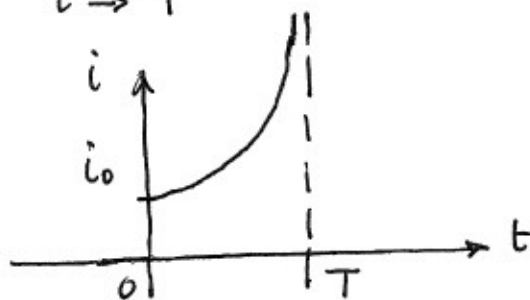
La funzione $f(i)$ è localmente Lipschitz, ma non globalmente. Quindi non c'è garanzia che la soluzione possa estendersi per $t \rightarrow \infty$

Ed infatti la soluzione ha la forma

$$i(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} (T-t)^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{T-t}} \quad (i_0 > 0)$$

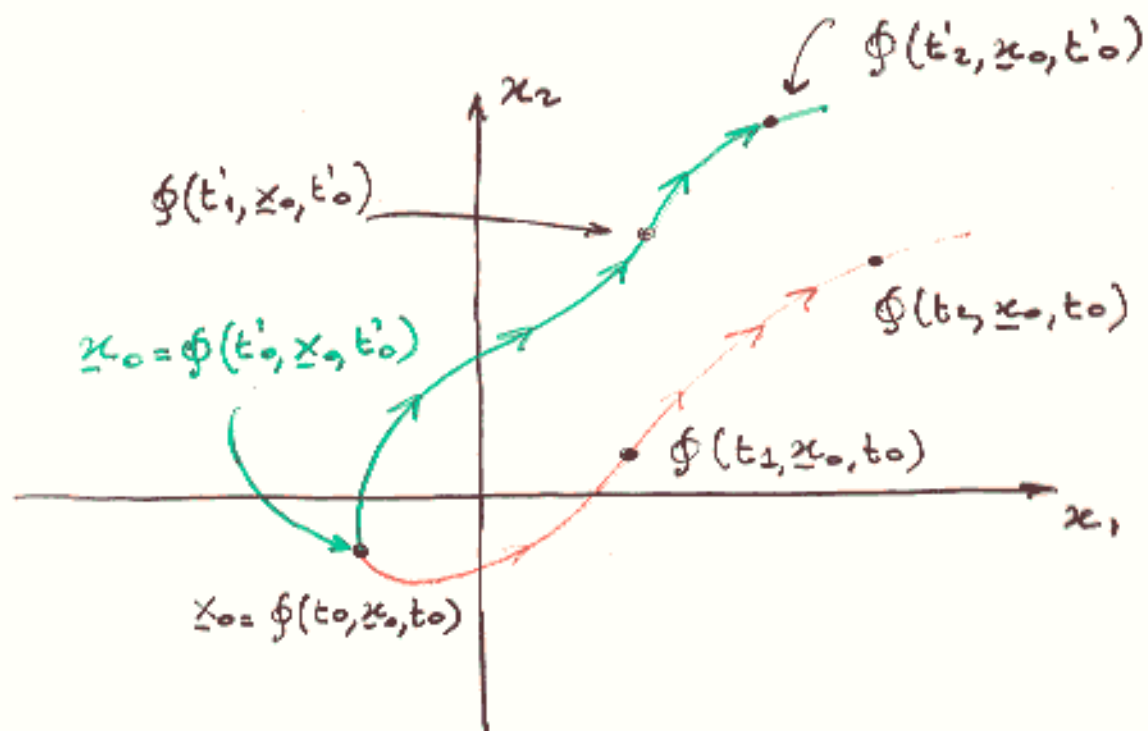
$$T = \frac{1}{2i_0^2}$$

La soluzione è definita per $t < T$ e tende ad ∞ quando $t \rightarrow T$



RAPPRESENTAZIONE DI $\Phi(t, \underline{x}_0, t_0)$

• SPAZIO DELLE FASI



$\forall (t_0, \underline{x}_0)$ SI RAPPRESENTA UNA CURVA NELLO SPAZIO \mathbb{R}^n DELLE VARIABILI DI STATO DOVE $t \in \mathbb{R}$ È IL PARAMETRO CHE DEFINISCE L'EVOLUZIONE DELLA CURVA

CARATTERISTICA: DUE CONDIZIONI INIZIALI DEL TIPO (t_0, \underline{x}_0) , (t'_0, \underline{x}_0) POSSONO EVOLVERE IN MODO DIVERSO.

CIRCUITI E SISTEMI AUTONOMI

UN CIRCUITO È DETTO AUTONOMO SE L'EQUAZIONE DI STATO PUÒ SCRIVERSI COME SEGUE

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

(GLI INGRESSI SONO NULLI OPPURE COSTANTI)

SE LA FUNZIONE $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ È LIPSCHITZ, ALLORA ESISTE UN'UNICA FUNZIONE

$$\phi(t, x_0)$$

TALE CHE

$$\phi(t_0, x_0) = x_0$$

$$\frac{d}{dt} \phi(t, x_0) = f(\phi(t, x_0))$$

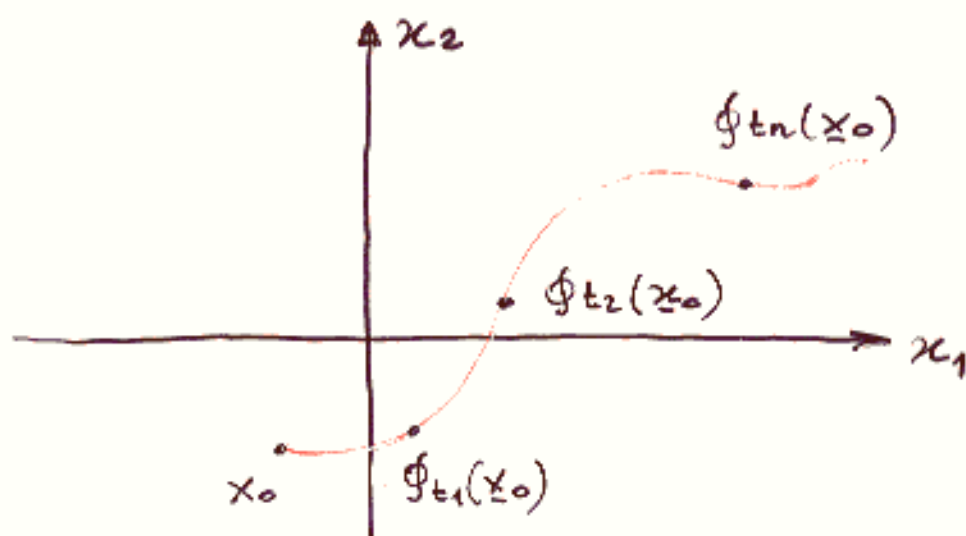
POICHÉ f NON DIPENDE DA t , SI PUÒ ARBITRARIAMENTE SCEGLIERE $t_0 = \phi$

NOTAZIONE

$$\phi(t, x_0) \triangleq \phi_t(x_0)$$

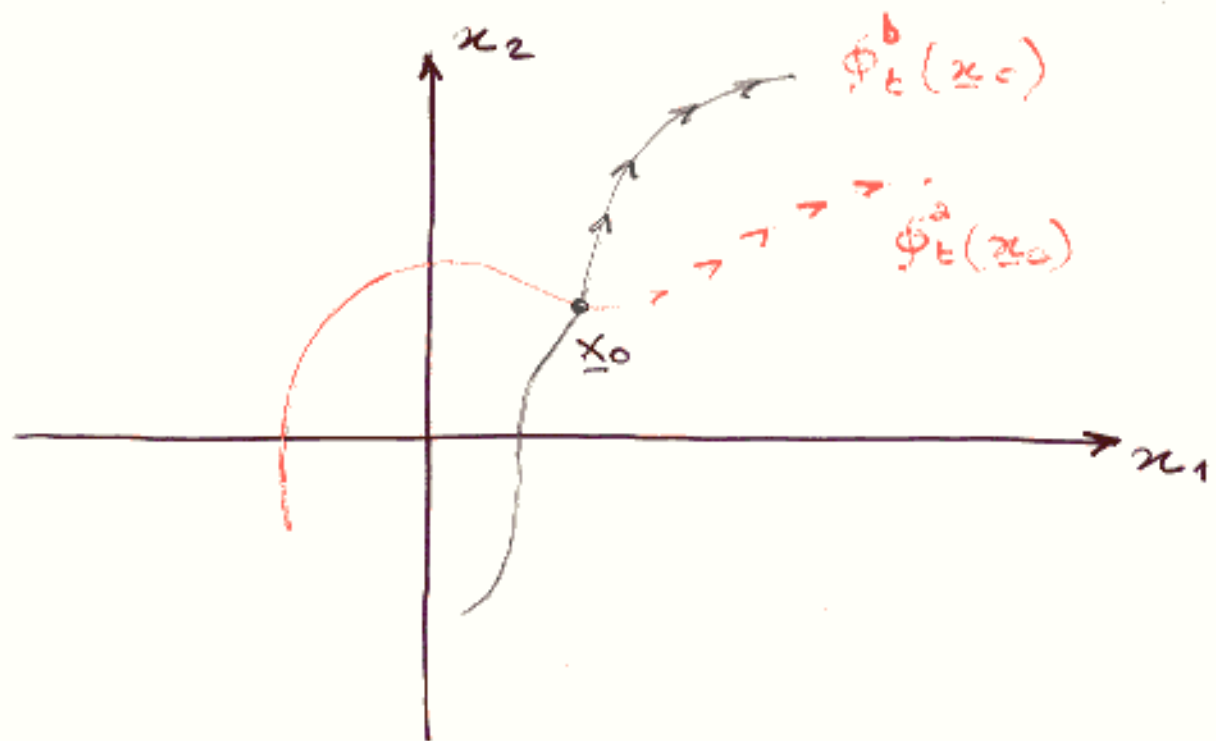
RAPPRESENTAZIONE DELLA FUNZIONE $\phi_t(x_0)$

• SPAZIO DELLE FASI



SI RAPPRESENTA UNA CURVA NELLO SPAZIO \mathbb{R}^n delle VARIABILI DI STATO DOVE "t" è il PARAMETRO CHE DEFINISCE L'EVOLUZIONE DELLA CURVA

CARATTERISTICA : (t_0, x_0) e (t'_0, x_0)
RAPPRESENTANO DUE CONDIZIONI INIZIALI IDENTICHE PERCHÉ ϕ_t NON DIPENDE da t_0 .



SE DUE TRAIETTORIE SI INTERSECANO IN UN PUNTO x_0 , ALLORA

$$\phi_t^b(x_0) \neq \phi_t^a(x_0)$$



QUESTO VIOLA L'UNICITA' DELLA SOLUZIONE

PROPRIETA'

- DATA UNA CONDIZIONE INIZIALE \underline{x}_0 , LA FUNZIONE $\phi_t(\underline{x}_0)$ DA' IL VALORE DELLE VARIABILI DI STATO DOPO t Secondi

$$\underline{x}(t) = \phi_t(\underline{x}_0)$$

- SI DIMOSTRA FACILMENTE CHE

$$\phi_{t+s}(\underline{x}_0) = \phi_t[\phi_s(\underline{x}_0)]$$

- CONSEGUENZA DELL' UNICITA' DELLA SOLUZIONE IN UN SISTEMA AUTONOMO



DUE TRAIETTORIE NON POSSONO INTERSECARSI

Existence and Uniqueness Theorem: Consider the initial value problem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Suppose that \mathbf{f} is continuous and that all its partial derivatives $\partial f_i / \partial x_j$, $i, j = 1, \dots, n$, are continuous for \mathbf{x} in some open connected set $D \subset \mathbf{R}^n$. Then for $\mathbf{x}_0 \in D$, the initial value problem has a solution $\mathbf{x}(t)$ on some time interval $(-\tau, \tau)$ about $t = 0$, and the solution is unique.

In other words, existence and uniqueness of solutions are guaranteed if \mathbf{f} is continuously differentiable. The proof of the theorem is similar to that for the case $n = 1$, and can be found in most texts on differential equations. Stronger versions of the theorem are available, but this one suffices for most applications.

From now on, we'll assume that all our vector fields are smooth enough to ensure the existence and uniqueness of solutions, starting from any point in phase space.

The existence and uniqueness theorem has an important corollary: *different trajectories never intersect*. If two trajectories *did* intersect, then there would be

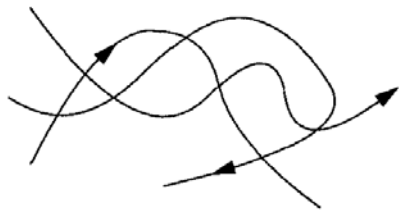


Figure 6.2.1

two solutions starting from the same point (the crossing point), and this would violate the uniqueness part of the theorem. In more intuitive language, a trajectory can't move in two directions at once.

Because trajectories can't intersect, phase portraits always have a well-groomed look to them. Otherwise they might degenerate into a snarl of criss-crossed curves (Figure 6.2.1). The existence and uniqueness theorem prevents this from happening.

Figure 6.2.2 shows a closed orbit C in the phase plane. Any trajectory starting inside C is trapped in there forever (Figure 6.2.2).

In two-dimensional phase spaces (as opposed to higher-dimensional phase spaces), these results have especially strong topological consequences. For example, suppose there is a closed orbit C in the phase plane. Then any trajectory starting inside C is trapped in there forever (Figure 6.2.2).

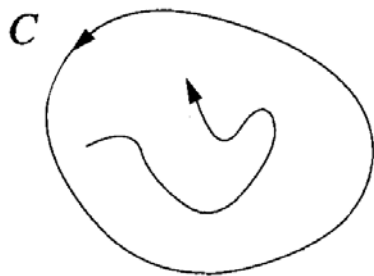


Figure 6.2.2

What is the fate of such a bounded trajectory? If there are fixed points inside C , then of course the trajectory might eventually approach one of them. But what if there *aren't* any fixed points? Your intuition may tell you that the trajectory can't meander around forever—if so, you're right.

For vector fields on the plane, the *Poincaré-Bendixson theorem* states that if a trajectory is confined to a closed, bounded region and there are no fixed points in the region, then the trajectory must eventually approach a closed orbit.

For vector fields on the plane, the *Poincaré-Bendixson theorem* states that if a trajectory is confined to a closed, bounded region and there are no fixed points in the region, then the trajectory must eventually approach a closed orbit.