SOLUZIONI

▶ Equazioni di stato: caso lineare -

- Soluzioni

1a)

$$\begin{cases} \dfrac{dv_3}{dt} = -\dfrac{3}{2} v_3 - i_4 + 5 \\[2ex] \dfrac{di_4}{dt} = v_3 - 2 i_4 \end{cases} \qquad (\mathrm{mA}, \mathrm{V}, \mu\mathrm{s})$$

1b)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dv_3}{dt} \\[2ex] \dfrac{dv_4}{dt} \\[2ex] \dfrac{di_5}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{R_2C_3} & 0 & -\dfrac{1}{C_3} \\[2ex] -\dfrac{g_m}{C_4} & -\dfrac{1}{R_7C_4} & \dfrac{1}{C_4} \\[2ex] \dfrac{1}{L_5} & -\dfrac{1}{L_5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\[2ex] v_4 \\[2ex] i_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{R_2C_3} \\[2ex] 0 \\[2ex] 0 \end{bmatrix} v_{s1}$$

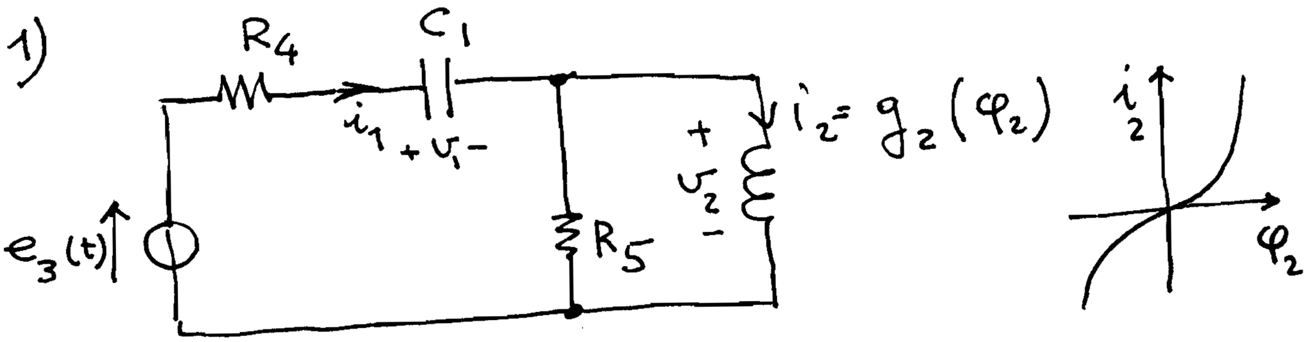
1c)

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = -\dfrac{9}{8} v_C - \dfrac{1}{4} i_L \\[2ex] \dfrac{di_L}{dt} = -\dfrac{1}{4} v_C - \dfrac{1}{2} i_L \end{cases}$$

▶ Scrittura delle eq. di stato: caso non lineare

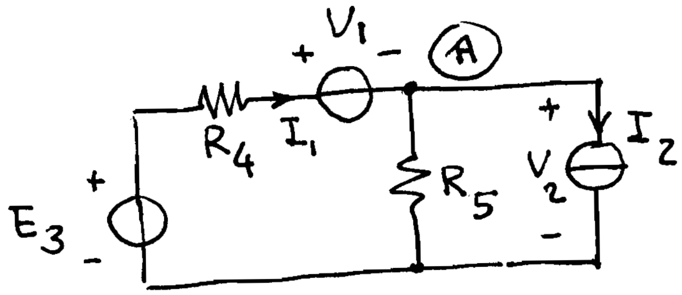
• Soluzioni

1)



Assumo come variabili di stato v_1 e φ_2

Considero il circuito resistivo associato:



$$i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt}$$

$$v_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$$

Calcolo I_1 e V_2 in funzione di E_3, V_1 e I_2

Uso il metodo dei nodi e scrivo la KCL al nodo A

$$V_2 G_5 + (V_2 - E_3 + V_1) G_4 + I_2 = 0$$

$$V_2 (G_4 + G_5) = G_4 E_3 - G_4 V_1 - I_2$$

$$V_2 = \frac{G_4}{G_4 + G_5} E_3 - \frac{G_4}{G_4 + G_5} V_1 - \frac{I_2}{G_4 + G_5}$$

e ottengo così l'eq. di stato:

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\frac{G_4}{G_4 + G_5} v_1 - \frac{1}{G_4 + G_5} g_2(\varphi_2) + \frac{G_4}{G_4 + G_5} e_3(t)$$

Calcolo ora I_1:

$$I_1 = \left[E_3 - (V_2 + V_1)\right] G_4 =$$

$$= E_3 G_4 - V_2 G_4 - V_1 G_4 = -V_1 G_4 + E_3 G_4 - G_4 \left[\frac{G_4}{G_4+G_5} E_3 - \frac{G_4}{G_4+G_5} V_1 - \frac{I_2}{G_4+G_5}\right];$$

$$I_1 = V_1 \left[-G_4 + \frac{G_4^2}{G_4+G_5}\right] + E_3 \left[G_4 - \frac{G_4^2}{G_4+G_5}\right] + \frac{G_4}{G_4+G_5} I_2$$

$$I_1 = -\frac{G_4 G_5}{G_4+G_5} V_1 + \frac{G_4}{G_4+G_5} I_2 + \frac{G_4 G_5}{G_4+G_5} E_3$$

Ottengo così l'altra eq. di stato:

$$C_1 \frac{dv_1}{dt} = -\frac{G_4 G_5}{G_4+G_5} v_1 + \frac{G_4}{G_4+G_5} g_2(\varphi_2) + \frac{G_4 G_5}{G_4+G_5} \cdot e_3$$

Riordinando:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{1}{C_1 (R_4+R_5)} v_1 + \dfrac{R_5}{C_1(R_4+R_5)} g_2(\varphi_2) + \dfrac{1}{C_1(R_4+R_5)} e_3(t) \\[2ex] \dfrac{d\varphi_2}{dt} = -\dfrac{R_5}{R_4+R_5} v_1 - \dfrac{R_4 R_5}{R_4+R_5} g_2(\varphi_2) + \dfrac{R_5}{R_4+R_5} e_3(t) \end{cases}$$

2) Oscillatore di Chua

$$
\begin{cases}
\dfrac{dv_1}{dt} = \dfrac{1}{C_1}\left[(v_2 - v_1)G - f(v_1)\right] \\
\dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{1}{C_2}\left[(v_1 - v_2)G + i_3\right] \\
\dfrac{di_3}{dt} = -\dfrac{1}{L}\left[v_2 + R_0 i_3\right]
\end{cases}
$$

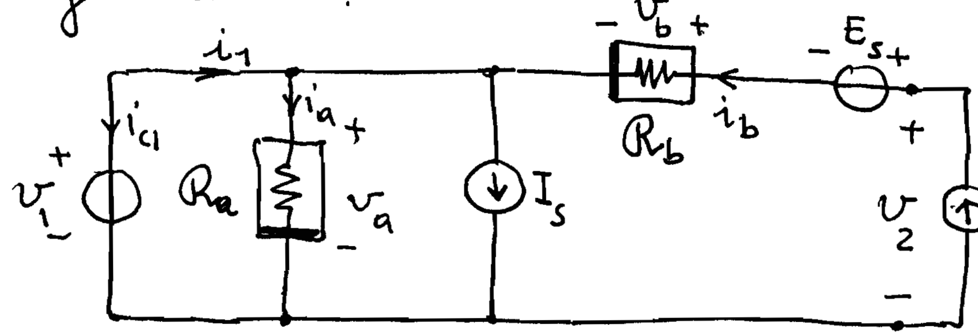
$$
f(v_1) = G_b v_1 + 0.5(G_a - G_b)\left[|v_1 + B_p| - |v_1 - B_p|\right]
$$

3a) v_{C1} e i_{L2} come variabili di stato

Sostituisco il condensatore con un generatore di tensione e l'induttore con un generatore di corrente e ridisegno il circuito come doppio bipolo resistivo chiuso sui due generatori:

$v_1 = v_{C1}$

$i_1 = -i_{C1}$



$i_2 = i_{L2}$

$v_2 = -v_{L2}$

Devo calcolare i_1 e v_2 in funzione di v_1 e $_2$

Osservo che $v_a \equiv v_1$; inoltre $v_1 + v_b + E_s = v_2$ e $i_2 \equiv i_b$

Quindi: $v_b = e^{i_2}$ e $\boxed{v_2 = v_1 + e^{i_2} + E_s}$

Per quanto riguarda i_1 ho:

$$\boxed{i_1 = i_a + I_s - i_b = v_1^5 - i_2 + I_s}$$

Le due equazioni cercate sono quindi:

$$-i_{C1} = v_{C1}^5 - i_{L2} + I_s \; ; \quad \boxed{i_{C1} = -v_{C1}^5 + i_{L2} - I_s} \quad (1)$$

$$(2) \quad \boxed{v_{L2} = -v_{C1} - e^{i_{L2}} - E_s}$$

Ora $i_{C1} = \frac{dq_{C1}}{dt} = 3v_{C1}^2 \frac{dv_{C1}}{dt}$ e $v_{L2} = \frac{d\varphi_{L2}}{dt} = \frac{1}{3} i_{L2}^{-\frac{2}{3}} \frac{di_{L2}}{dt}$

Sostituendo:

$$\begin{cases} \frac{dv_{C1}}{dt} = -\frac{1}{3v_{C1}^2}\left(v_{C1}^5 - i_{L2} + I_s\right) \\ \frac{di_{L2}}{dt} = -3\, i_{L2}^{2/3}\left(v_{C1} + e^{i_{L2}} + E_s\right) \end{cases}$$

3b) Parto dalle (1) e (2) e assumo q_{C1} e φ_{L2} come variabili di stato

Ora è $v_{C1} = q_{C1}^{1/3}$ e $i_{L2} = \varphi_{L2}^3$. Dalle (1) e (2) ottengo:

$$\begin{cases} \dfrac{dq_{C1}}{dt} = -q_{C1}^{5/3} + \varphi_{L2}^3 - I_S \\ \dfrac{d\varphi_{L2}}{dt} = -q_{C1}^{1/3} - e^{\varphi_{L2}^3} - E_S \end{cases}$$

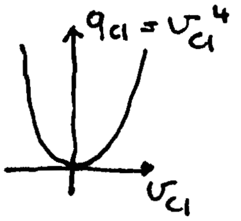
3c) v_{C1} e φ_{L2} come variabili di stato

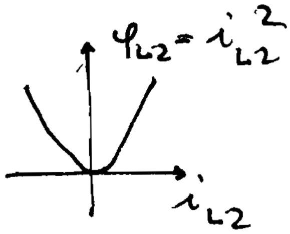
$$\begin{cases} \dfrac{dv_{C1}}{dt} = -\dfrac{1}{3v_{C1}^2}\left(v_{C1}^5 - \varphi_{L2}^3 + I_S\right) \\ \dfrac{d\varphi_{L2}}{dt} = -v_{C1} - e^{\varphi_{L2}^3} - E_S \end{cases}$$

3d) q_{C1} e i_{L2} come variabili di stato

$$\begin{cases} \dfrac{dq_{C1}}{dt} = -q_{C1}^{5/3} + i_{L2} - I_S \\ \dfrac{di_{L2}}{dt} = -3\,i_{L2}^{2/3}\left(q_{C1}^{1/3} + e^{i_{L2}} + E_S\right) \end{cases}$$

4.1)



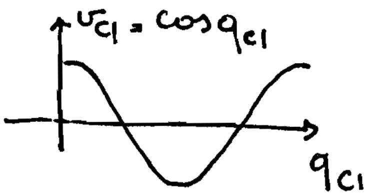


a: possibile , b, c, d: non possibili (le funzioni non sono invertibili)

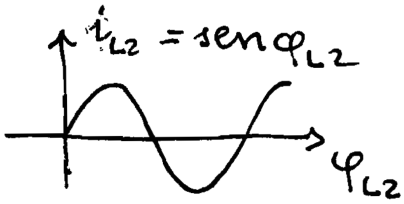
$$\frac{dq_{C1}}{dt} = 4 v_{C1}^3 \frac{dv_{C1}}{dt} \qquad \frac{d\varphi_{L2}}{dt} = 2 i_{L2} \frac{di_{L2}}{dt}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dv_{C1}}{dt} = -\dfrac{1}{4v_{C1}^3}\left(v_{C1}^5 - i_{L2} + I_S\right) \\ \dfrac{di_{L2}}{dt} = -\dfrac{1}{2i_{L2}}\left(v_{C1} + e^{i_{L2}} + E_S\right) \end{cases}$$

4.2)



charge-controlled

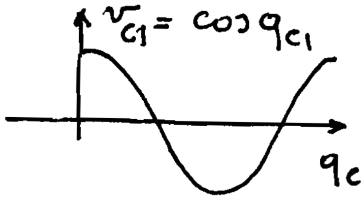


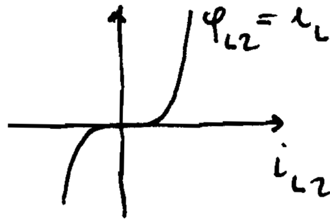
flux-controlled

Posso assumere q_{C1} e φ_{L2} come var. di stato (caso b)
Gli altri casi (a, c, d) non sono possibili.

$$\begin{cases} \dfrac{dq_{C1}}{dt} = -(\cos q_{C1})^5 + \operatorname{sen}\varphi_{L2} - I_S \\ \dfrac{d\varphi_{L2}}{dt} = -\cos q_{C1} - e^{\operatorname{sen}\varphi_{L2}} - E_S \end{cases}$$

4.3)





q_{C1} è var. di stato, mentre v_{C1} non può essere var. di stato

entrambe i_{L2} e φ_{L2} possono essere variabili di stato.

Casi a) e c) non possibili, mentre sono possibili i casi b) e d).

b) q_{C1} e φ_{L2} come var. di stato

$$\begin{cases} \dfrac{dq_{C1}}{dt} = -(\cos q_{C1})^5 + \sqrt[3]{\varphi_{L2}} - I_S \\ \dfrac{d\varphi_{L2}}{dt} = -\cos q_{C1} - e^{\varphi_{L2}^{1/3}} - E_S \end{cases}$$

d) q_{C1} e i_{L2} come var. di stato

$$\begin{cases} \dfrac{dq_{C1}}{dt} = -(\cos q_{C1})^5 + i_{L2} - I_S \\ \dfrac{di}{dt} = -\dfrac{1}{3 i_{L2}^2}\left(\cos q_{C1} + e^{i_{L2}} + E_S\right) \end{cases}$$