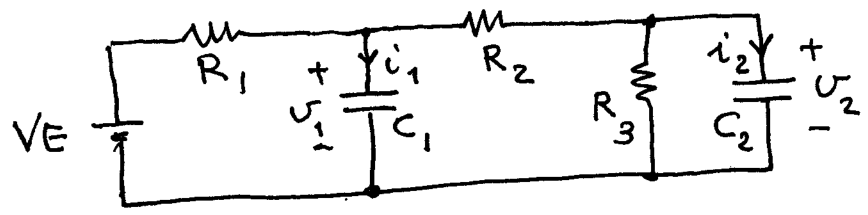
Soluzione

- Eq. di stato: assumo v_1 e v_2 come variabili di stato e calcolo i_1 e i_2 in funzione di v_1, v_2 ed VE.



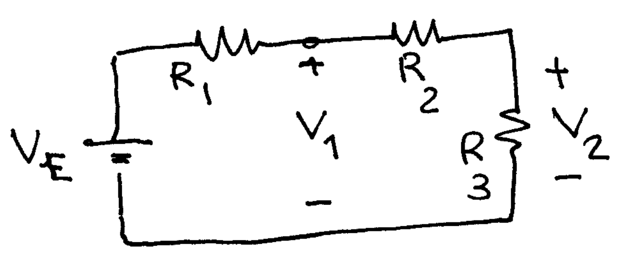
$$\begin{cases} i_1 = (V_E - v_1)G_1 + (v_2 - v_1)G_2 \\ i_2 = (v_1 - v_2)G_2 - v_2 G_3 \end{cases} \qquad \text{ma } i_1 = C_1 \frac{dv_1}{dt} \quad \text{e } i_2 = C_2 \frac{dv_2}{dt}$$

Si ottiene:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_1}{dt} = -\dfrac{G_1+G_2}{C_1} v_1 + \dfrac{G_2}{C_1} v_2 + \dfrac{G_1}{C_1} V_E \\ \dfrac{dv_2}{dt} = \dfrac{G_2}{C_2} v_1 - \dfrac{G_2+G_3}{C_2} v_2 \end{cases}$$

- Punto di equilibrio

Si può porre $\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} = 0$ nelle eq. di stato, ma è più veloce ricordare che in equilibrio i condensatori sono circuiti aperti e quindi il problema si riduce ad analizzare il circuito:



$$V_1 = \frac{R_2+R_3}{R_1+R_2+R_3} V_E$$

$$V_2 = \frac{R_3}{R_1+R_2+R_3} V_E$$

Numericamente:

$Q: \quad V_1 = 8{,}\overline{33}\ V \qquad V_2 = 4{,}1667\ V$

- Calcolo gli autovalori:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} -(G_1+G_2)/C_1 & G_2/C_1 \\ G_2/C_2 & -(G_2+G_3)/C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0{,}07 & 0{,}02 \\ 0{,}02 & -0{,}04 \end{bmatrix}$$

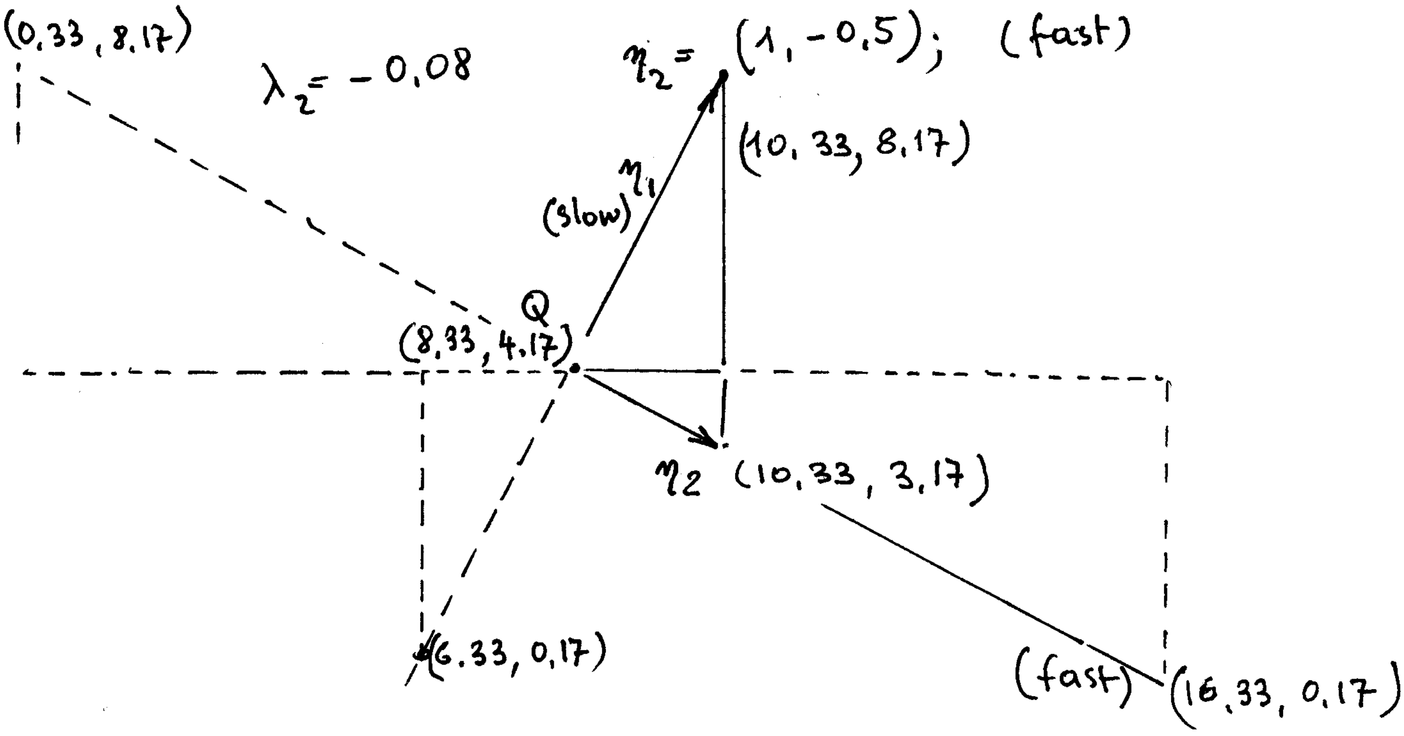
Gli autovalori valgono: $-0{,}08$; $-0{,}03$ (Matlab)

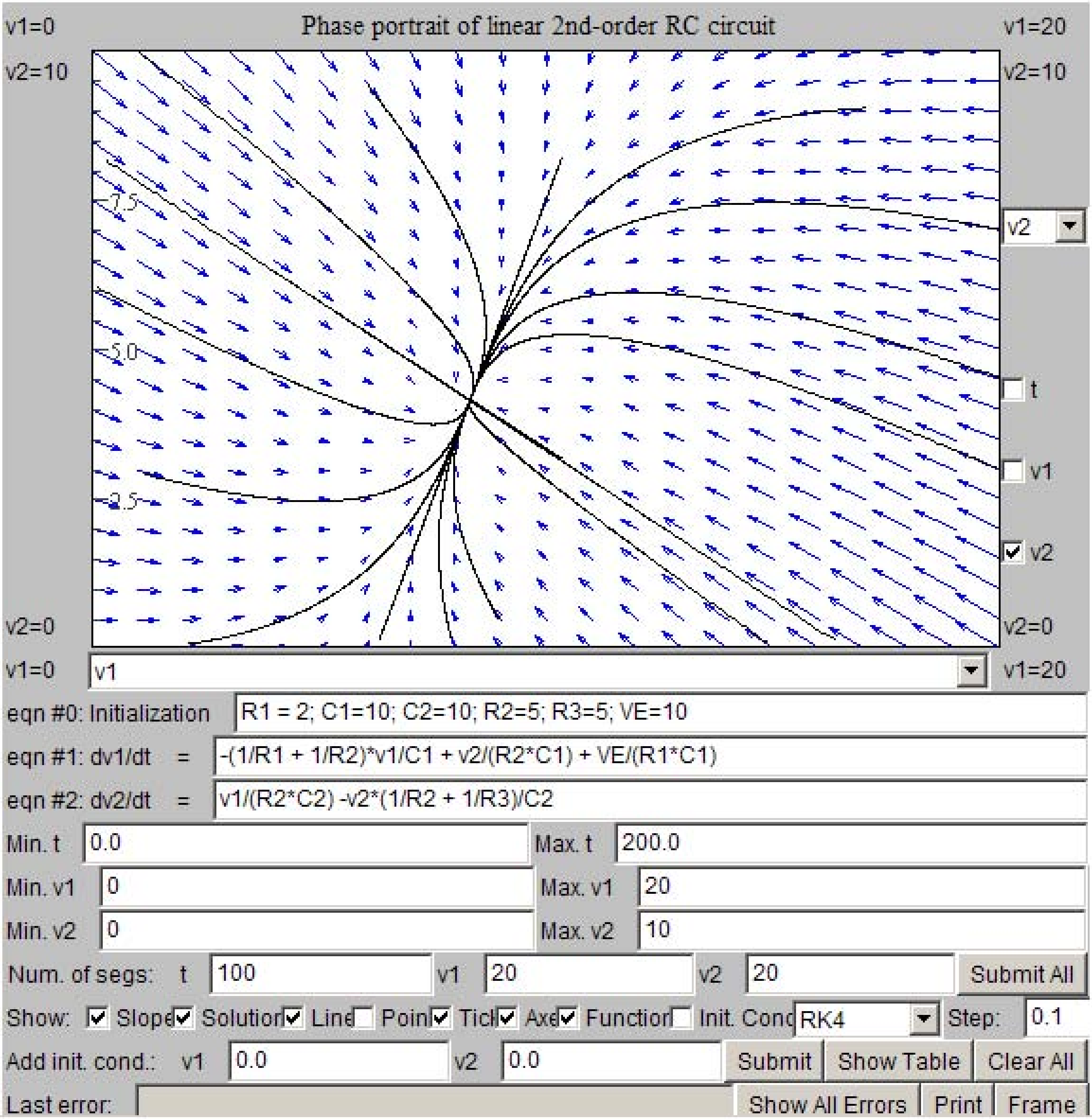
Quindi Q è <u>un nodo stabile</u>

Gli autovettori sono (Matlab):

$\lambda_1 = -0{,}03 \qquad \eta_1 = (1, 2)$; (slow)

$\lambda_2 = -0{,}08 \qquad \eta_2 = (1, -0{,}5)$; (fast)





v1=0
Phase portrait of linear 2nd-order RC circuit
v1=20
v2=10
v2=10
7.5
5.0
2.5
v2
t
v1
v2
v2=0
v2=0
v1=0
v1
v1=20
eqn #0: Initialization
R1 = 2; C1=10; C2=10; R2=5; R3=5; VE=10
eqn #1: dv1/dt =
-(1/R1 + 1/R2)*v1/C1 + v2/(R2*C1) + VE/(R1*C1)
eqn #2: dv2/dt =
v1/(R2*C2) -v2*(1/R2 + 1/R3)/C2
Min. t
0.0
Max. t
200.0
Min. v1
0
Max. v1
20
Min. v2
0
Max. v2
10
Num. of segs: t
100
v1
20
v2
20
Submit All
Show: Slope Solution Line Point Tick Axe Function Init. Cond
RK4
Step:
0.1
Add init. cond.: v1
0.0
v2
0.0
Submit
Show Table
Clear All
Last error:
Show All Errors
Print
Frame

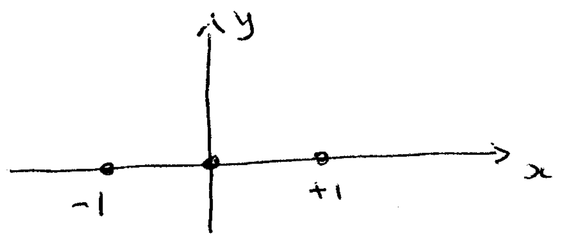
6.3.1, Strogatz, p. 151

$$\dot{x} = -x + x^3$$
$$\dot{y} = -2y$$

EQ. points $\quad \dot{x} = \dot{y} = 0$

$$-x + x^3 = 0 \qquad x(x^2-1) = 0 \quad x(x-1)(x+1) = 0$$
$$2y = 0 \qquad y = 0$$

$Q_1 : (0,0) \qquad Q_2 : (1,0) \qquad Q_3 = (-1,0)$

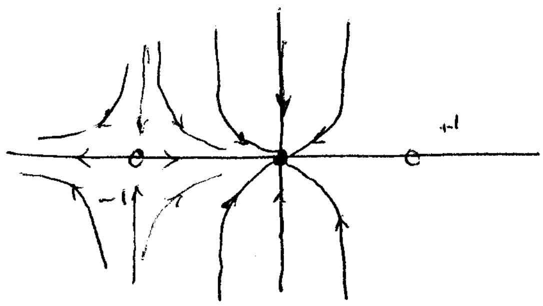


Calcolo lo Jacobiano

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{x} & \frac{\partial f_2}{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+3x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Q_1 : $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ $\qquad$ Q_2, Q_3 $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$

Stable node $\qquad\qquad$ Saddle



Si consideri il seguente sistema non lineare

$$\begin{cases} \dot{x} = x(3-x-2y) \\ \dot{y} = y(2-x-y) \end{cases} \qquad x, y \geq 0$$

(Lotka-Volterra model of competition, Strogatz, es. 6.4 p. 155)

Si vuole diagrammare il comportamento qualitativo nel piano delle fasi.

I) Ricerca dei punti di equilibrio

Ogni equazione contiene il prodotto di due fattori.

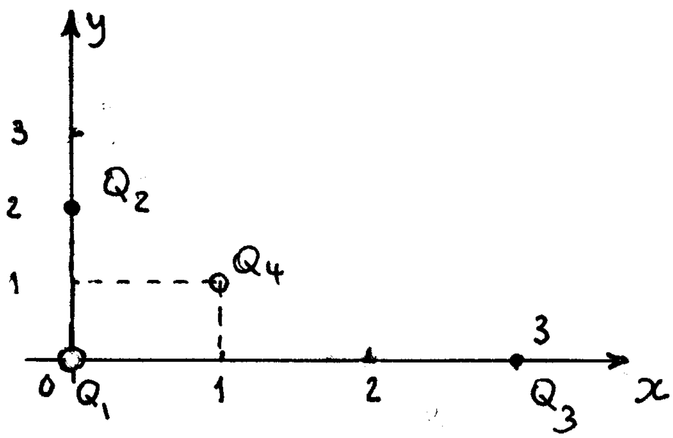
In totale ho quattro casi per cui $\dot{x} = \dot{y} = 0$:

$x = 0 \qquad y = 0 \rightarrow Q_1\,(0,0)$

$x = 0 \qquad 2-x-y=0 \rightarrow Q_2\,(0,2)$

$y = 0 \qquad 3-x-2y=0 \rightarrow Q_3\,(3,0)$

$$\begin{cases} 3-x-2y=0 \\ 2-x-y=0 \end{cases} \begin{cases} x+2y=3 \\ x+y=2 \end{cases} \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \rightarrow Q_4\,(1,1)$$



II) Valutazione della stabilità.

Calcolo lo Jacobiano

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y \\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-2x-2y & -2x \\ -y & 2-x-2y \end{bmatrix}$$

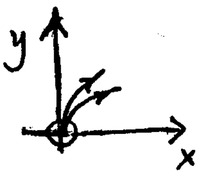
Valuto lo Jacobiano nei diversi punti

$\boxed{Q_1\ (0,0)}$ $\qquad \underline{J} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases}$

l'origine è quindi un <u>nodo instabile</u>.
Calcolo gli autovettori $\underline{V}_1$ e $\underline{V}_2$. Indico con v_1 e v_2 le componenti di $\underline{V}_1$:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\underline{I} \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad v_1 = 0,\ v_2 \text{ arbitrario}$$

scelgo $v_2 = 1$ e quindi ho $\underline{V}_1 = (0,1)$; le traiettorie lasciano l'origine tangenti a $\underline{V}_1$ (in un nodo, le traiettorie sono tangenti all'autovettore "lento", cioè quello corrispondente all'autovalore di modulo più piccolo). In questo caso le traiettorie sono tangenti all'asse y



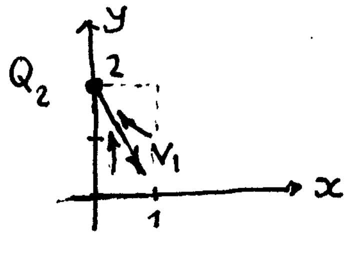
$\boxed{Q_2\ (0,2)}$ $\qquad \underline{J} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{matrice triangolare}]{} \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -2$

Q_2 è un <u>nodo stabile</u>

Le traiettorie si avvicinano a Q_2 secondo la direzione dell'autovettore $\underline{V}_1$ associato a λ_1. $\underline{V}_1 = (v_1, v_2)$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} + \underline{I} \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad -2v_1 - v_2 = 0$$

assumo $v_1 = 1$, $v_2 = -2$: $\underline{V}_1 = (1,-2)$



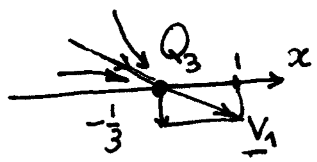
$\boxed{Q_3 \ (3,0)}$ $\qquad J = \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; matrice diagonale : $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -3$

Q_3 è un <u>nodo stabile</u>.

L'autovettore associato a λ_1 è $\underline{V}_1 = (v_1, v_2)$

$$\left\{ \begin{bmatrix} -3 & -6 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + I \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad -2v_1 - 6v_2 = 0$$

$$\underline{V}_1 = \left(1, -\frac{1}{3}\right)$$



$\boxed{Q_4 \ (1,1)}$

$$J = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \det \begin{bmatrix} -1-\lambda & -2 \\ -1 & -1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (1-\lambda)^2 - 2 = 0 \quad \lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$$

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1+1} = -1 \pm \sqrt{2} \quad \begin{cases} -1-\sqrt{2} < 0 ; \lambda_1 \\ -1+\sqrt{2} > 0 ; \lambda_2 \end{cases}$$

Q_4 è un punto <u>di sella</u>

Calcolo i due autovettori $\underline{V}_1$ e $\underline{V}_2$ corrispondenti a λ_1 e λ_2

$\underline{V}_1$:

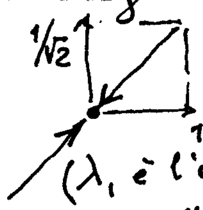
$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + (1+\sqrt{2})\underline{I} \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} \cancel{-1}\cancel{+1}+\sqrt{2} & -2 \\ -1 & \cancel{-1}\cancel{+1}+\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{2}\, v_1 - 2v_2 = 0 \\ -v_1 + \sqrt{2}\, v_2 = 0 \end{cases}$$

Le due equazioni sono linearmente dipendenti (com'è giusto che sia)

Prendo la seconda, ove pongo $v_1 = 1$ e ottengo $v_2 = 1/\sqrt{2}$

$$\underline{V}_1 = (1, 1/\sqrt{2})$$

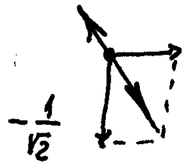


(λ_1 è l'autovalore "stabile")

$\underline{V}_2$

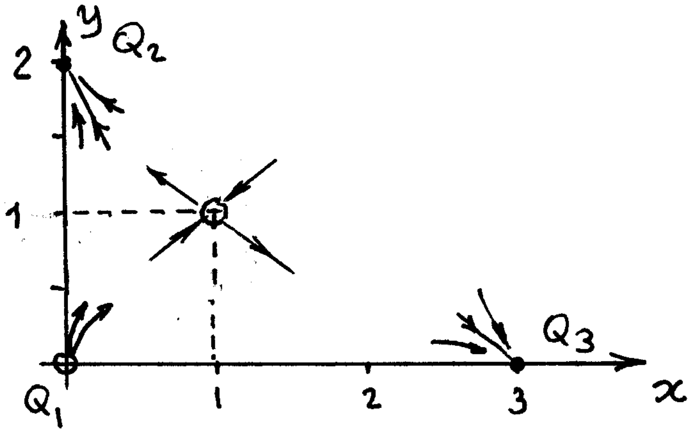
$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} - (-1+\sqrt{2})\underline{I} \right\} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & -2 \\ -1 & -\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

da cui $\underline{V}_2 = \left(1, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



(λ_2 è l'autovalore "instabile")

Combinando i risultati trovati in un unico grafico, si può avere già una buona idea dell'andamento qualitativo delle traiettorie nel piano delle fasi:



Si noti infine che in questo caso $\dot{x}=0$ quando $x=0$ e $\dot{y}=0$ quando $y=0$, quindi l'asse x e l'asse y contengono delle traiettorie rettilinee che vanno da Q_1 a Q_3 e da Q_1 a Q_2.

Pielou (1969), Edelstein–Keshet (1988), or Murray (1989) for additional references and analysis.

Our example also illustrates some general mathematical concepts. Given an attracting fixed point $\mathbf{x}^*$, we define its ***basin of attraction*** to be the set of initial conditions $\mathbf{x}_0$ such that $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}^*$ as $t \to \infty$. For instance, the basin of attraction for the node at $(3,0)$ consists of all the points lying below the stable manifold of the saddle. This basin is shown as the shaded region in Figure 6.4.8.

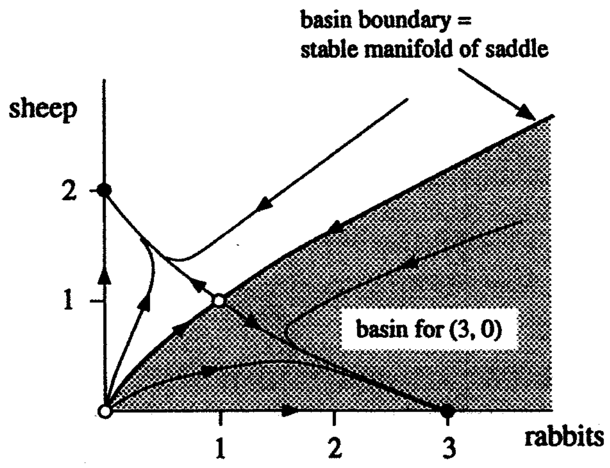


Figure 6.4.8

Because the stable manifold separates the basins for the two nodes, it is called the ***basin boundary***. For the same reason, the two trajectories that comprise the stable manifold are traditionally called ***separatrices***. Basins and their boundaries are important because they partition the phase space into regions of different long-term behavior.

6.5 Conservative Systems

Newton's law $F = ma$ is the source of many important second-order systems. For example, consider a particle of mass m moving along the x-axis, subject to a nonlinear force $F(x)$. Then the equation of motion is

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Notice that we are assuming that F is independent of both $\dot{x}$ and t; hence there is no damping or friction of any kind, and there is no time-dependent driving force.

Under these assumptions, we can show that *energy is conserved*, as follows. Let $V(x)$ denote the ***potential energy***, defined by $F(x) = -dV/dx$. Then

$$m\ddot{x} + \frac{dV}{dx} = 0. \qquad (1)$$

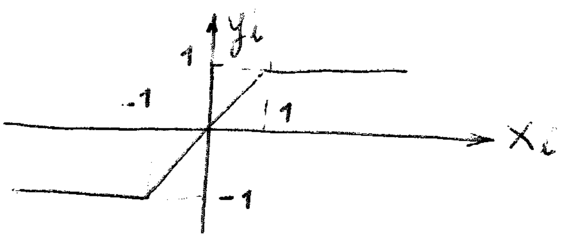
Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos

RETI ELETTRICHE NON LINEARI

Si consideri la rete neurale cellulare semplificata, composta da sole due celle, e descritta dal seguente sistema di equazioni differenziali:

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + a_{11}\, y_1 + a_{12}\, y_2 \tag{1}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + a_{21}\, y_1 + a_{11}\, y_2 \tag{2}$$

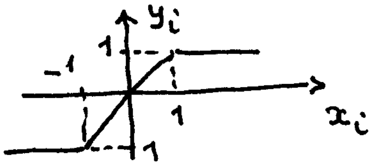


Assumendo $a_{11} = 1.1$, $a_{12} = -0.08$, $a_{21} = 2.0$:

1. Si determinino analiticamente tutti i punti di equilibrio della rete e le loro caratteristiche di stabilità.
2. Si determinino, per via numerica, le varietà stabili dei punti di sella.
3. Si verifichi che le varietà stabili dividono il piano x_1,x_2 (spazio delle fasi) in tre regioni, che rappresentano i bacini di attrazione di opportuni attrattori.
4. Si determinino (sfruttando il risultato ottenuto al punto 1 e mediante la simulazione) i tre attrattori della rete corrispondenti ai tre bacini di attrazione.
5. Si verifichi, mediante la simulazione nel tempo, la correttezza dei bacini di attrazione e degli attrattori determinati ai punti 3 e 4.

La CNN è descritta da:

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + a_{11} y_1 + a_{12} y_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + a_{21} y_1 + a_{11} y_2 \end{cases} \qquad a_{11} = 1{,}1 \quad a_{12} = -0{,}08 \quad a_{21} = 2{,}0$$



Per uso con Jode, y_i è descritta da

$$y_i = -1 + \frac{G}{2}\left[|x_i+1| + (x_i+1)\right] - \frac{G}{2}\left[|x_i-1| + (x_i-1)\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[|x_i+1| - |x_i-1|\right]$$

1) Determino analiticamente tutti i punti di equilibrio e le loro caratteristiche di stabilità.

Osservo che se il sistema ammette la soluzione x_1, x_2, ammette anche la soluzione $-x_1, -x_2$. Quindi nel piano delle fasi le traiettorie ed i punti di equilibrio sono simmetrici rispetto all'origine.

Considero tutti i casi possibili:

$\boxed{x_1 > 1 \,,\; x_2 > 1} \rightarrow y_1 = 1 \,,\; y_2 = 1$. Le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1{,}1 - 0{,}08 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2 + 1{,}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1{,}02 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 3{,}1 \end{cases}$$

Punto di equilibrio $\boxed{Q_1 = (1{,}02,\ 3{,}1)}$ accettabile

Il sistema è lineare e gli autovalori sono dati da

$$\det\left[\underline{A} - \lambda \underline{I}\right] = 0 \,, \quad \text{con } \underline{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow \lambda_{1,2} = -1$$

Inoltre si osservi che le due equazioni sono disaccoppiate e possono quindi essere risolte separatamente.

Q_1 è stabile e si tratta di un <u>nodo stella</u>; le soluzioni sono:

$$\begin{cases} x_1 = (x_{10} - 1{,}02)e^{-t} + 1{.}02 \\ x_2 = (x_{20} - 3{,}10)e^{-t} + 3{,}10 \end{cases} \qquad x_1, x_2 > 1$$

ove x_{10} e x_{20} sono i valori iniziali

$\boxed{x_1 > 1 \,, |x_2| < 1}$ $\longrightarrow$ $y_1 = 1$, $y_2 = x_2$. Le equazioni diventano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1{,}1 - 0{,}08 x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2{,}0 + 1{,}1 x_2 \end{cases}$$

Cerco il punto di equilibrio:

$$\begin{cases} x_1 + 0{,}08 x_2 = 1{,}1 \\ 1{,}1 x_2 - x_2 = -2 \end{cases} \qquad 0{,}1 x_2 = -2 \quad x_2 = -20$$

NON ACCETTABILE

$\boxed{x_1 > 1 ,\, x_2 < -1}$ $\longrightarrow$ $y_1 = 1$, $y_2 = -1$. Le eq. diventano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1{,}1 + 0{,}08 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2 - 1{,}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1{,}18 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 0{,}9 \end{cases}$$

Si ha l'equilibrio per $x_2 = 0{,}9$, NON ACCETTABILE

$\boxed{|x_1| < 1 ,\, x_2 > 1}$ $y_1 = x_1$, $y_2 = 1$ Le eq. diventano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1{,}1 x_1 - 0{,}08 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2{.}0 x_1 + 1{,}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 0{,}1 x_1 - 0{,}08 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2 x_1 + 1{,}1 \end{cases}$$

Punto di equilibrio: $x_1 = \frac{0{,}08}{0{,}1} = 0{,}8$

$x = 2x_1 + 1{,}1 = 1{,}6 + 1{,}1 = 3{,}7$ ACCETTABILE

$$\boxed{Q_2 = (0{,}8\,,\,2{,}7)}$$

Il sistema è lineare: $\underline{A}: \begin{bmatrix} 0{,}1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

Gli autovalori sono $\lambda_1 = 0{,}1$, $\lambda_2 = -1$: Q_2 è un <u>punto di sella</u>

$\boxed{|x_1|<1\,,\ |x_2|<1}$ $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$. Le eq. diventano:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1{,}1\,x_1 - 0{,}08\,x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2{,}0\,x_1 + 1{,}1\,x_2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = 0{,}1x_1 - 0{,}08x_2 \\ \dot{x}_2 = 2{,}0x_1 + 0{,}1x_2 \end{cases}$$

Equilibrio per $\begin{cases} 0{,}1x_1 - 0{,}08x_2 = 0 \\ 2x_1 + 0{,}1x_2 = 0 \end{cases} \longrightarrow x_1 = x_2 = 0$

$$\boxed{Q_3 = (0,0)}$$

Calcolo gli autovalori:

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} 0{,}1 & -0{,}08 \\ 2 & 0{,}1 \end{bmatrix}; \quad \det(\underline{A} - \lambda\underline{I}) = \det\begin{bmatrix} 0{,}1-\lambda & -0{,}08 \\ 2 & 0{,}1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (0{,}1-\lambda)^2 + 0{,}16\ ; \quad \det(\underline{A}-\lambda\underline{I}) = 0: \ \lambda^2 - 0{,}2\lambda + 0{,}17 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 0{,}1 \pm \sqrt{0{,}01 - 0{,}17} = 0{,}1 \pm j\sqrt{0{,}16} = 0{,}1 \pm j0{,}4$$

Q_3 è un <u>fuoco instabile</u> (o anche spirale instabile)

$|x_1|<1$, $x_2<-1$ $\quad y_1 = x_1$, $y_2=-1$. Le eq. diventano

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + 1{,}1\,x_1 + 0{,}08 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2\,x_1 - 1{,}1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{x}_1 = +\,0{,}1x_1 + 0{,}08 \\ \dot{x}_2 = -\,x_2 + 2x_1 - 1{,}1 \end{cases}$$

Come previsto si trova un punto di equilibrio $Q_4 = (-0{,}8, -2{,}7)$, simmetrico di Q_2 rispetto all'origine

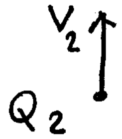
Così ci sarà un altro punto $Q_5 = (-1.02, -3{,}1)$, simmetrico di Q_1 rispetto all'origine.

2) Per determinare le varietà stabili dei punti di sella, calcolo l'autovettore corrispondente a $\lambda_2 = +1$ per il punto di sella $Q_2 = (0.8, 2.7)$

$$\left[\underline{A} - \lambda_2 \underline{I}\right] \underline{V}_2 = 0 \qquad \begin{bmatrix} 0{,}1+1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$$

$\begin{cases} 1{,}1\,v_1 = 0 \\ 2\,v_1 = 0 \end{cases}$ da cui deduco $v_1 = 0$, v_2 qualsiasi: assumo $v_2 = 1$ e quindi $\underline{V}_2 = (0, 1)$

Si tratta di un vettore parallelo all'asse delle ordinate



La varietà stabile è quindi la retta $x_1 = 0{,}8$, $x_2 > 1$ (valida fino a che $x_2 > 1$)

Quando x_2 raggiunge il valore 1, entro nella regione $|x_1|<1$, $|x_2|<1$, con condizione iniziale $x_{10} = 0{,}8$, $x_{20} = 1$.

Ora devo integrare le eq. differenziali

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0{,}1x_1 - 0{,}08x_2 \\ \dot{x}_2 = 2x_1 + 0{,}1x_2 \end{cases} \qquad \text{con } x_{10} = 0{,}8,\ x_{20} = 1$$

e autovalori $0{,}1 \pm j0{,}4$

Posso scrivere direttamente la soluzione

$$\begin{cases} x_1(t) = A_1 e^{0,1t} \cos(0,4t+\varphi_1) \\ x_2(t) = A_2 e^{0,1t} \cos(0,4t+\varphi_2) \end{cases} \qquad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0,8 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \underline{\dot{x}}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1,7 \end{bmatrix}$$

(Per il calcolo di $\dot{x}(0)$ ho:

$$\dot{x}_1 = 0,1 \times 0,8 - 0,08 = 0$$

$$\dot{x}_2 = 2 \times 0,8 + 0,1 \times 1 = 1,6 + 0,1 = 1,7$$)

Prima eq:

$$\dot{x}_1 = 0,1 A_1 e^{0,1t} \cos(0,4t+\varphi_1) + A_1 e^{0,1t} \left[-\mathrm{sen}(0,4t+\varphi_1) \times 0,4 \right]$$

$$\dot{x}_1(0) = 0,1 A_1 \cos\varphi_1 + A_1 \times (-0,4 \,\mathrm{sen}\,\varphi_1)$$

Deve essere:

$$\begin{cases} A_1 \cos\varphi_1 = 0,8 \\ 0,1 \cancel{A_1} \cos\varphi_1 - 0,4 \cancel{A_1} \,\mathrm{sen}\,\varphi_1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 \cos\varphi_1 = 0,8 \\ 0,1 \cos\varphi_1 = 0,4 \,\mathrm{sen}\,\varphi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A_1 \cos\varphi_1 = 0,8 \\ \mathrm{tg}\,\varphi_1 = \frac{0,1}{0,4} = 0,25 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_1 = \frac{0,8}{\cos\varphi_1} = 0,8246 \\ \varphi_1 = 0,245 \text{ (rad)} \end{cases}$$

$$x_1(t) = 0,8246 \, e^{0,1t} \cos(0,4t + 0,245)$$

Calcolo ora $x_2(t)$

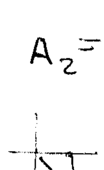
$$\dot{x}_2(0) = 0,1 A_2 \cos\varphi_2 - 0,4 A_2 \,\mathrm{sen}\,\varphi_2 = 1,7$$

$$\begin{cases} A_2 \cos\varphi_2 = 1 \\ 0,1 A_2 \cos\varphi_2 - 0,4 A_2 \,\mathrm{sen}\,\varphi_2 = 1,7 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2 \cos\varphi_2 = 1 \\ 0,1 \times 1 - 0,4 A_2 \,\mathrm{sen}\,\varphi_2 = 1,7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -0,4 A_2 \,\mathrm{sen}\,\varphi_2 = 1,6 \\ A_2 \cos\varphi_2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A_2 \,\mathrm{sen}\,\varphi_2 = -4 \\ A_2 \cos\varphi_2 = 1 \end{cases}$$

$$A_2^2 = 16 + 1 = 17 \qquad A_2 = \sqrt{17}$$

$$\mathrm{tg}\,\varphi_2 = -4$$



$$\varphi_2 = -1,3258$$

Le due equazioni sono:

$$\begin{cases} x_1(t) = 0,8246\, e^{0,1t} \cos(0,4t + 0,245) & |x_1|<1 \\ x_2(t) = 4,1231\, e^{0,1t} \cos(0,4t - 1,3258) & |x_2|<1 \end{cases}$$

Queste sono due eq. parametriche in t, che possono essere valutate per $t<0$ (reverse time)

Il valore $x_2 = -1$ viene raggiunto per $t = -1,3130$ (Matlab). Corrispondentemente si ha $x_1 = +0,6949$
L'accordo con Jode è buono.
Ora si entra nella regione $|x_1|<1$ e $x_2 < -1$

Le eq. sono

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 0,1x_1 + 0,08 \\ \dot{x}_2 = -x_2 + 2x_1 - 1,1 \end{cases} \quad \text{con} \quad \underline{x}(0) = \begin{bmatrix} +0,6949 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Gli autovalori sono $0,1$ e -1. La sol. ha la forma

$$\begin{cases} x_1(t) = a_1 e^{0,1t} + b_1 e^{-t} \\ x_2(t) = a_2 e^{0,1t} + b_2 e^{-t} \end{cases}$$

basta aggiungere il vincolo su $\dot{x}(0)$:

$$\dot{x}_1(0) = 0,1 \times 0,6949 + 0,08 = 0,1495$$

$$\dot{x}_2(0) = 1 + 2 \times (0,6949) - 1,1 = 1,2898$$

$$\dot{x}_1(0) = 0,1a_1 - b_1$$

$$\dot{x}_2(0) = 0,1a_2 - b_2$$

In definitiva:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 = +0,6949 \\ 0,1a_1 - b_1 = 0,1495 \end{cases} \quad \begin{array}{l} 1,1a_1 = 0,8444 \\ b_1 = +0,6949 - a_1 \end{array} \quad \begin{cases} a_1 = 0,7676 \\ b_1 = -0,0727 \end{cases}$$

4.4

$$\begin{cases} a_2 + b_2 = -1 \\ 0{,}1 a_2 - b_2 = 1{,}2898 \end{cases} \qquad \begin{matrix} 1{,}1 a_2 = 0{,}2898 \\ b_2 = -1 - a_2 \end{matrix} \qquad \begin{cases} a_2 = 0{,}2635 \\ b_2 = -1{,}2635 \end{cases}$$

Le soluz. sono

$$\begin{cases} x_1(t) = 0{,}7676\, e^{0{,}1t} - 0{,}0727 e^{-t} \\ x_2(t) = 0{,}2635\, e^{0{,}1t} - 1{,}2635\, e^{-t} \end{cases}$$

L'accordo con Jode è discreto (Euler, 0,1). Usando RK4, 0,01, si ottiene la separatrice partendo da $x_1 = 0{,}515$, $x_2 = -3{,}976$. Implementando la funzione $x_1(t)$ e $x_2(t)$ con Matlab si ottiene $x_1 = 0{,}439$, $x_2 = -3{,}965$

Si noti che la tabulazione avviene per t negativi, quindi gli elementi più pesanti sono i due esponenziali che contengono e^{-t} (che diventano esponenziali con esp. positivo)

Per tempi piccoli l'accordo migliora:

X_2	X_1	
	JODE	MTLB
-1,998	0,61	0,595
-2,985	0,55	0,51
-3,976	0,515	0,439

Una piccola differenza nei valori iniziali di partenza porta ad amplificare le differenze

In effetti Jode dà, per $X_2 = -1{,}001902$, $X_2 = 0{,}694809$ (invece di 0,6949 da me usato per valutare $X_1(t)$ e $X_2(t)$)