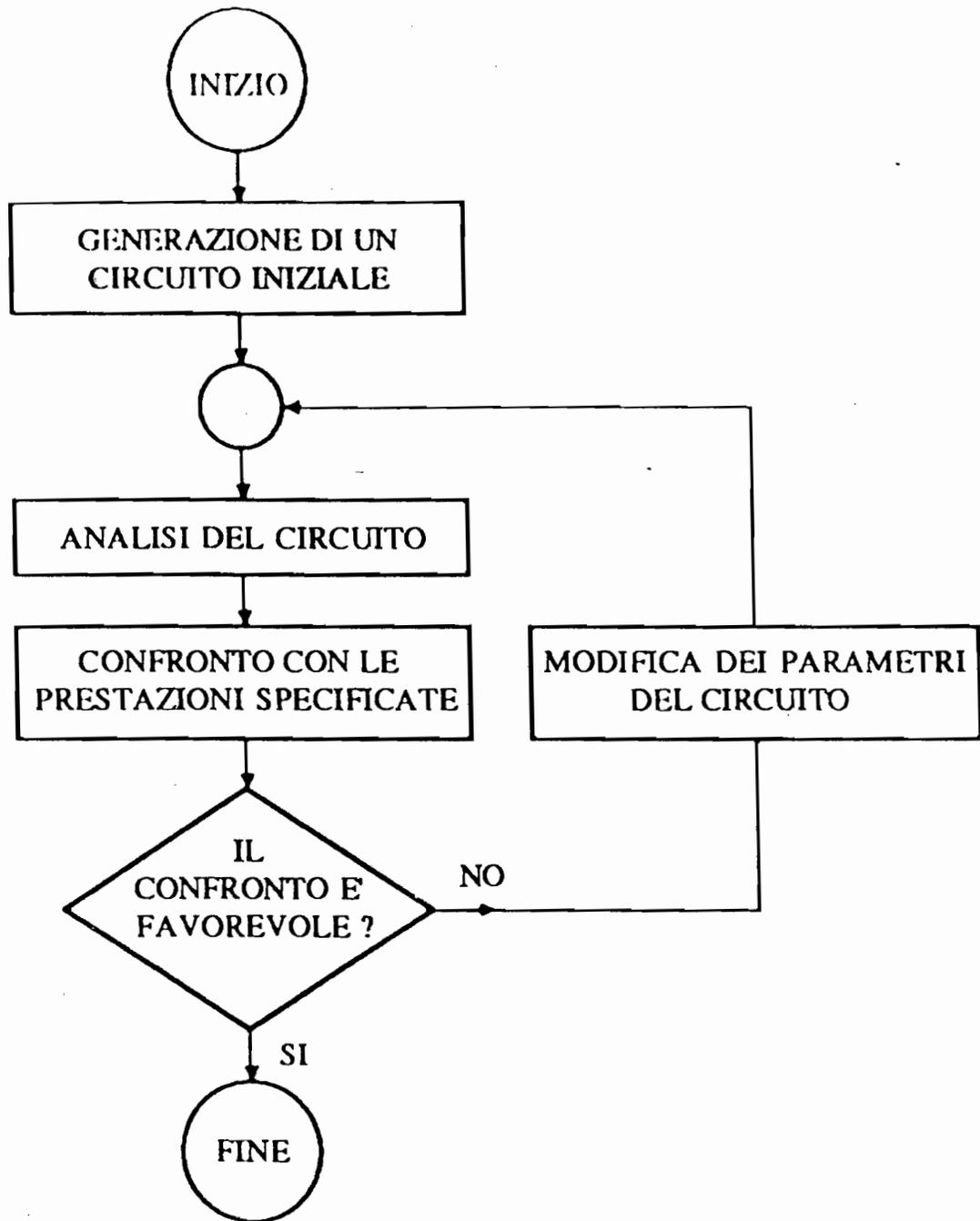
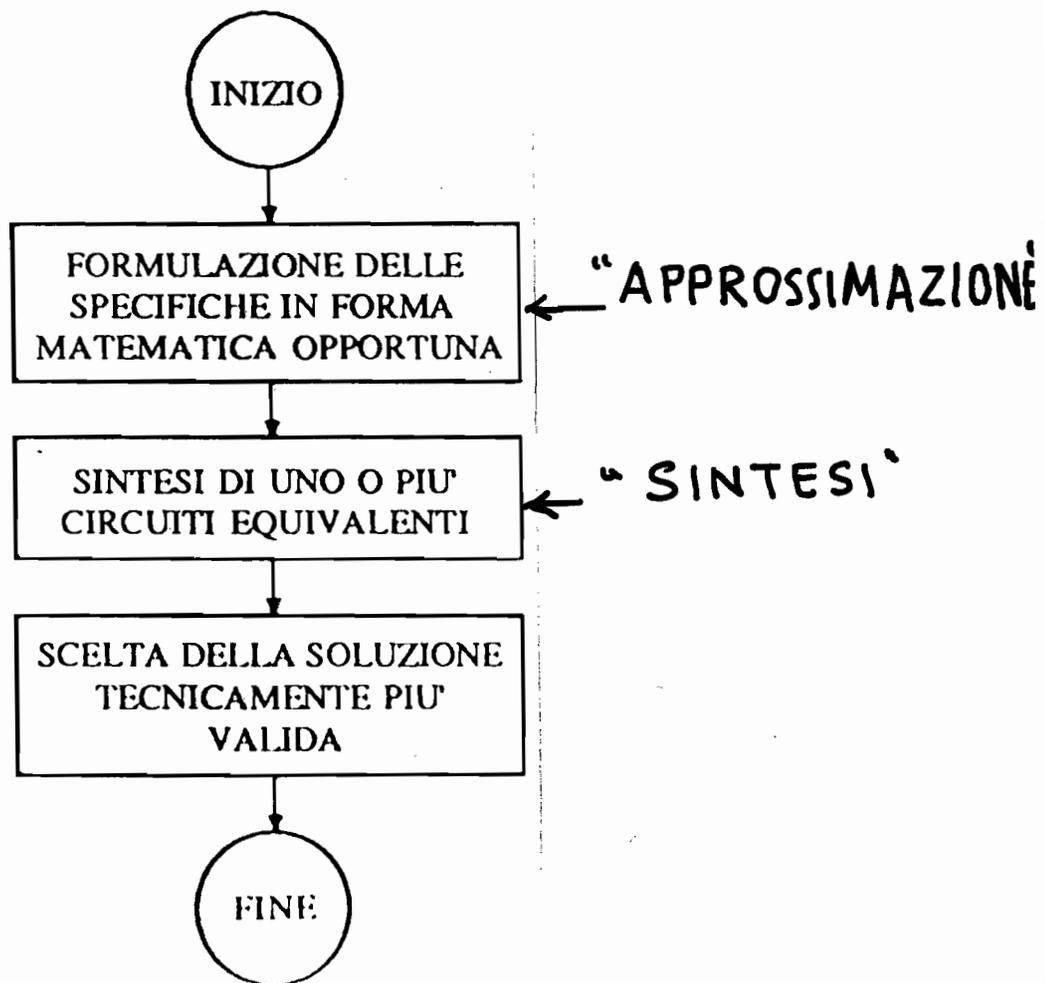


Confronto dei vari campi di utilizzo di filtri analogici realizzati in diverse tecnologie. In ascissa è riportata la frequenza di centro banda e in ordinata il Q del filtro, definito come rapporto tra la frequenza di centro banda e la larghezza di banda a 3 dB.

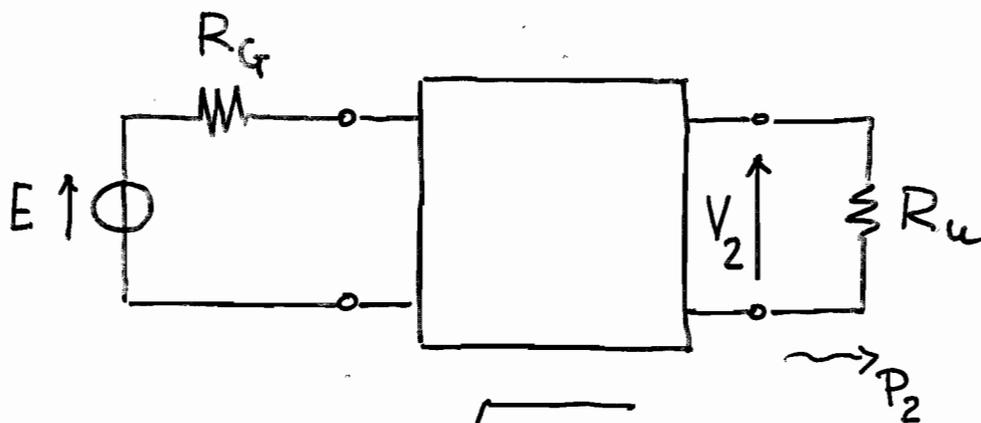
Estratto da G. S. Moschytz : "Linear Integrated Networks: Design", Van Nostrand Reinhold, 1975





Funzioni usate nel progetto di doppi bipoli

- Diverse a seconda delle condizioni di alimentazione e di carico



Doppio bipolo
"caricato dai
due lati"

$$t(s) \triangleq 2 \sqrt{\frac{R_G}{R_u}} \frac{V_2(s)}{E(s)}$$

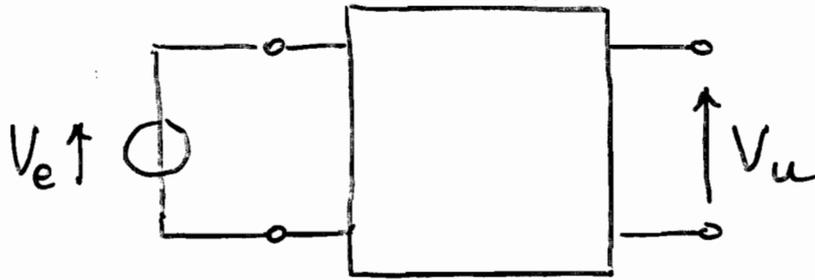
↑
coeff. di trasmissione

Significato energetico:

$$|t(j\omega)|^2 = 4 \frac{R_G}{R_u} \frac{|V_2|^2}{|E|^2} = \frac{|V_2|^2/R_u}{|E|^2/4R_G} = \frac{P_2}{P_{\max}}$$

$$\alpha_t(\omega) \triangleq 20 \log |1/t(j\omega)| \quad \text{dB}$$

↑
attenuazione trasduttiva



$$K_V(s) \triangleq \frac{V_u(s)}{V_e(s)}$$

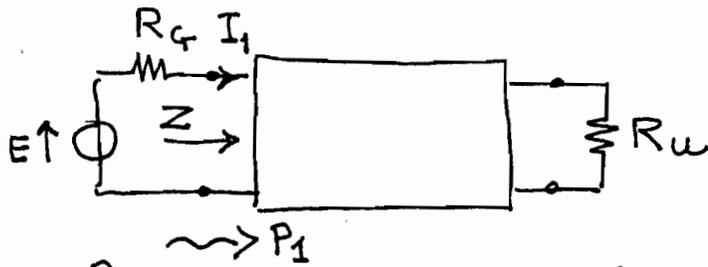
$$\alpha_V(\omega) \triangleq 20 \log \left| \frac{1}{K_V(j\omega)} \right| \quad \text{dB}$$

↑ attenuazione di tensione

In genere, considerata una funzione di rete $H(s)$, chiameremo attenuazione la quantità:

$$\alpha_H(\omega) \triangleq 20 \log \left| \frac{1}{H(j\omega)} \right| \quad \text{dB}$$

Il coefficiente di riflessione all'entrata $\rho(z)$



$$\rho(z) \triangleq \frac{R_G - Z(z)}{R_G + Z(z)}$$

Regime sinusoidale: $s = j\omega$ $Z = R + jX$

$$|\rho(j\omega)|^2 = \frac{(R_G - R)^2 + X^2}{(R_G + R)^2 + X^2} = 1 - \frac{4RR_G}{(R_G + R)^2 + X^2}$$

Ora: $P_1 = R |I_1|^2 = R \frac{|E|^2}{|R_G + Z|^2} =$

$$= R \frac{|E|^2}{(R_G + R)^2 + X^2}$$

$$P_{\max} = \frac{|E|^2}{4R_G}$$

$$\frac{P_1}{P_{\max}} = \frac{4RR_G}{(R_G + R)^2 + X^2}$$

Si ha quindi:

$$|\rho(j\omega)|^2 = 1 - \frac{P_1}{P_{\max}} = \frac{P_{\max} - P_1}{P_{\max}} \triangleq \frac{P_r}{P_{\max}}$$

ove $P_r \triangleq P_{\max} - P_1$ viene chiamata potenza riflessa.

NOTE

• $\rho(s) \equiv -S_{11}$ (par. scattering)

• Per un doppio bipolo reattivo (LC) e⁻

$$P_1 = P_2 \implies |t(j\omega)|^2 + |\rho(j\omega)|^2 = 1$$

• Per un doppio bipolo reattivo

$$0 \leq |t(j\omega)|^2 \leq 1$$

$$0 \leq |\rho(j\omega)|^2 \leq 1$$

Doppi bipoli "caricati da un lato solo"

• Definizione

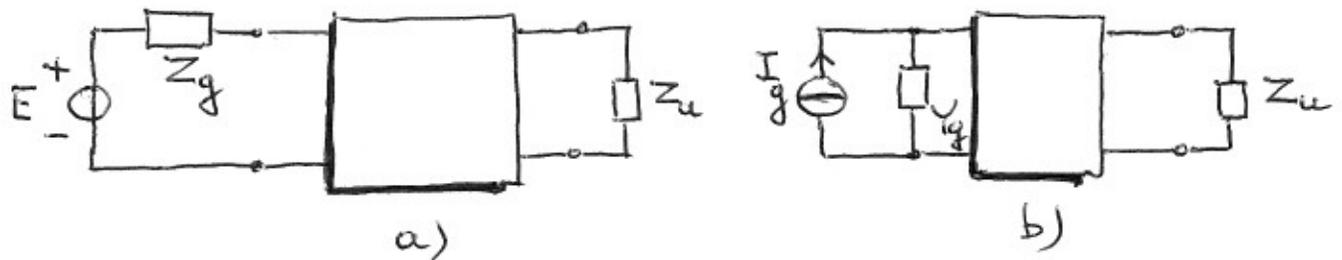


Fig 1. Doppi bipoli "caricati dai due lati"

Il doppio bipolo si dice che è "caricato da un lato solo" se:

- o il generatore è ideale ($Z_g = 0$ in fig 1a, $Y_g = 0$ in fig 1b);
- oppure l'uscita è a vuoto o in corto circuito ($Y_u = 0$ in fig 1a, $Z_u = 0$ in fig. 1b)

Note:

- Il caso di uscita in corto circuito ha scarso interesse pratico
- Si supponrà che $Z_g = R_g$ e $Z_u = R_u$
- In genere si cerca di realizzare un doppio bipolo reattivo che attui il modulo della funzione di rete assegnata.

• Esempi



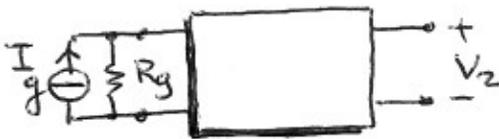
$$Z_m \triangleq V_2 / I_g$$

Dato del problema: $|Z_m(j\omega)|^2$



$$K_v \triangleq V_2 / E$$

Dato del problema: $|K_v(j\omega)|^2$



$$Z_m \triangleq V_2 / I_g$$

Dato del problema: $|Z_m(j\omega)|^2$

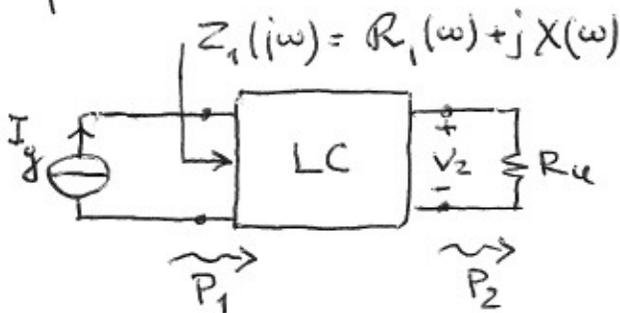


$$K_v \triangleq V_2 / E$$

Dato del problema: $|K_v(j\omega)|^2$

• Strategia di sintesi

Il modulo al quadrato della funzione di rete è legato, nel caso di doppi bipoli reattivi, alla parte reale dell'immettanza d'ingresso.



$$LC: P_1 = P_2$$

$$P_1 = R_1(\omega) |I_g|^2$$

$$P_2 = |V_2|^2 / R_u$$

$$\text{Ma } P_1 = P_2 \Rightarrow R_1(\omega) |I_g|^2 = |V_2|^2 / R_u$$

$$\boxed{|Z_m(j\omega)|^2 = R_u R_1(\omega)}$$

Esistono procedure (metodo di Gewertz)^(*)
che permettono: a) di ricostruire Z_1 partendo
dalla conoscenza della sua parte reale e
b) di sintetizzare Z_1 nella forma di
doppio-bipolo LC chiuso su una
resistenza -

[*] Gewertz, C. M. : "Network Synthesis", Wilkins and
Wilkins, Baltimore, 1933

Dal quadrato dell'ampiezza alla funzione

$$|t(j\omega)|^2 \xrightarrow{?} t(s)$$

Consideriamo una generica funzione di rete

$$H(s) = \frac{f(s)}{g(s)}$$

• Definizione:

La funzione $H(s)H(-s)$ è detta **GENERATRICE DEL MODULO**

• Proprietà:

$H(s)H(-s)$ è pari in s

$$H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|^2$$

Infatti:

$$H(s)H(-s) \Big|_{s=j\omega} = H(j\omega)H(-j\omega) = H(j\omega)[H(j\omega)]^* = |H(j\omega)|^2$$

• Strategia:

1) Da $|H(j\omega)|^2$ si passa a $H(s)H(-s)$ con la sostituzione $\omega^2 = -s^2$

2) Si determinano zeri e poli di $H(s)H(-s)$. Essi hanno simmetria rispetto all'asse immaginario

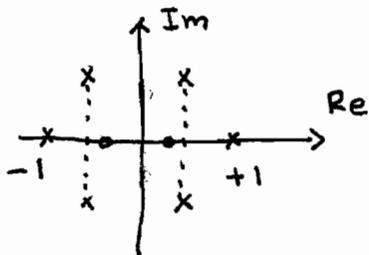
3) Volendo una funzione stabile, tutti i poli con parte reale negativa vengono attribuiti a $g(s)$

4) Gli zeri di $H(s)$ possono essere scelti a piacere, con il solo vincolo che $f(s)f(-s)$ fornisca il numeratore di $H(s)H(-s)$

• Esempio 1:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1 + 2\omega^2}{1 + \omega^6}$$

$$H(s)H(-s) = \frac{1 - 2s^2}{1 - s^6} = \frac{(1 - \sqrt{2}s)(1 + \sqrt{2}s)}{(1-s)(1+s+s^2)(1+s)(1-s+s^2)}$$



$$H(s) = \frac{f(s)}{g(s)} = \begin{cases} \frac{(1 - \sqrt{2}s)}{(1+s)(1+s+s^2)} = \frac{1 - \sqrt{2}s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \\ \frac{1 + \sqrt{2}s}{(1+s)(1+s+s^2)} = \frac{1 + \sqrt{2}s}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \end{cases}$$

Sintesi di un doppio bipolo LC bicaricato

Si indichi con $s = \Sigma + j\Omega$ la pulsazione del filtro passa basso normalizzato e sia assegnato il modulo al quadrato del coefficiente di trasmissione:

$$|t(j\Omega)|^2 = \frac{1}{1 + \Omega^6}$$

Si vuole sintetizzare un doppio bipolo LC , chiuso tra resistenze unitarie, che attui il modulo assegnato. Come primo passo si ricava la generatrice del modulo di $t(s)$:

$$t(s)t(-s) = \frac{1}{1 - s^6} = \frac{1}{(1 - s)(s^2 + s + 1)(1 + s)(s^2 - s + 1)}$$

Posto $t(s) = f(s)/g(s)$ e assegnando a $g(s)$ le radici nel semipiano di sinistra, si ottiene:

$$t(s) = \frac{f(s)}{g(s)} = \frac{1}{(1 + s)(s^2 + s + 1)} = \frac{1}{s^3 + s^2 + s + 1}$$

A questo punto occorre ricavare il coefficiente di riflessione all'entrata $\rho(s) = h(s)/g(s)$. Ciò può essere fatto ricordando che per un doppio bipolo LC caricato da entrambi i lati vale la relazione (detta *equazione caratteristica*)

$$h(s)h(-s) + f(s)f(-s) = g(s)g(-s)$$

Nel caso presente si ha $h(s)h(-s) = -s^6$ e quindi $h(s) = \pm s^3$. Scegliendo la determinazione positiva, si ottiene:

$$\rho(s) = \frac{h(s)}{g(s)} = \frac{s^3}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Può essere ora calcolata l'impedenza ai morsetti d'entrata del doppio bipolo:

$$z(s) = \frac{1 - \rho}{1 + \rho} = \frac{g - h}{g + h} = \frac{2s^2 + 2s + 1}{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

Sintetizzando $z(s)$ con il metodo delle divisioni successive, si ottiene il circuito indicato in figura. Se si fosse scelta la determinazione negativa di $h(s)$, si sarebbe ottenuto il circuito duale di quello indicato (ovvero con due induttori e un condensatore).

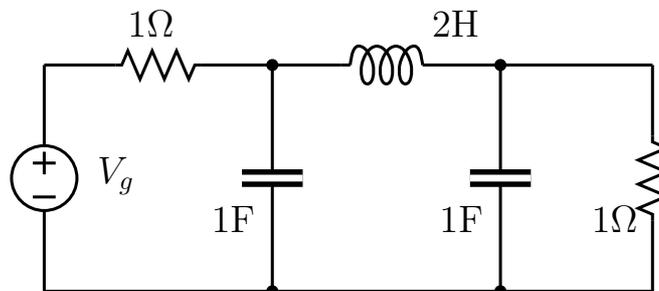


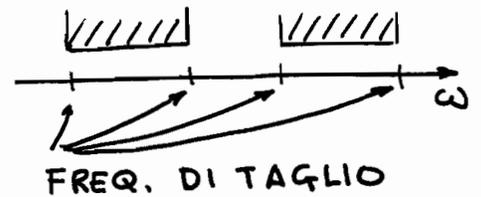
Figura 1. Doppio bipolo LC bicaricato che attua il modulo del coefficiente di trasmissione assegnato

FILTRI

■ Generalità

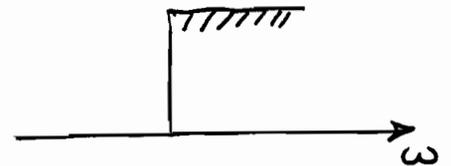
- banda (o bande) passanti

$$\alpha_t \leq \alpha_M$$



- banda (o bande) attenuate

$$\alpha_t \geq \alpha_m$$



- bande di transizione

α_t non è soggetta a vincoli particolari

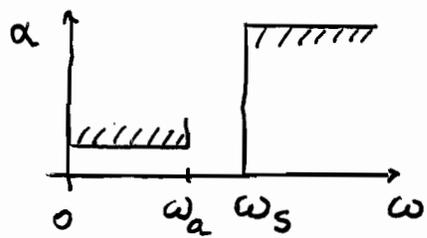
- a volte le specifiche sono poste sul ritardo di gruppo:

$$\tau(\omega) = - \frac{d\varphi}{d\omega}$$

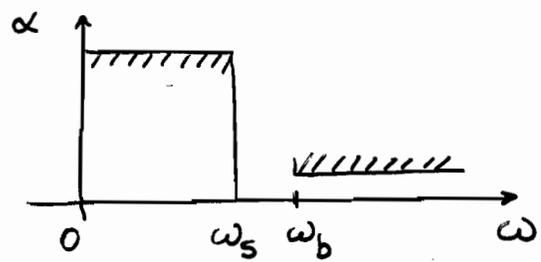
La banda passante è allora l'intervallo in cui τ si mantiene costante, entro una tolleranza assegnata.

- specifiche contemporanee su α_t e su τ :
si progetta un filtro d'ampiezza, seguito da un equalizzatore di fase
- devono essere precisate in modo chiaro le condizioni di carico alle porte

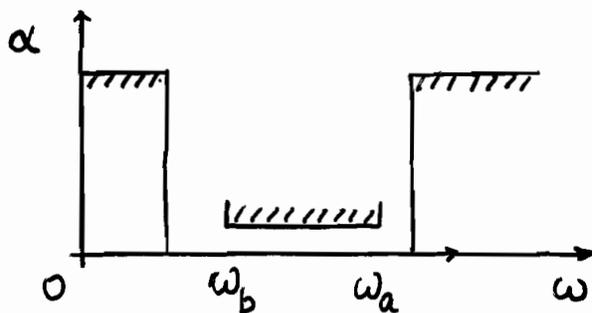
. tipi di filtri più frequenti



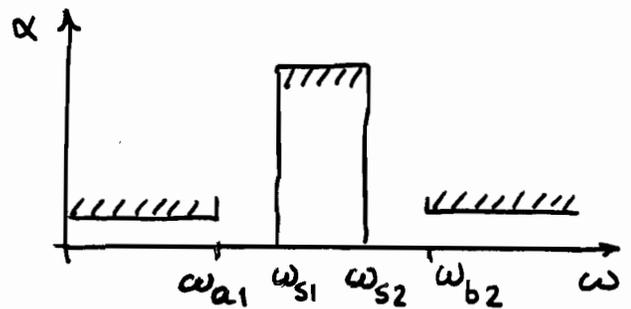
PASSA BASSO



PASSA ALTO



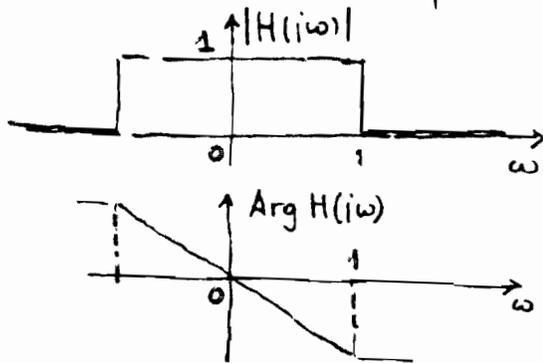
PASSA BANDA



ELIMINA BANDA

■ Filtri ideali

- Con le premesse fatte, ci si riferisce ora ad una generica f.d.t. u/e $H(p)$ (che potrà essere, a seconda dei casi, $t(p)$, $K_v(p)$, $Z_m(p)$ ecc.)
- Caratteristiche del filtro IDEALE PASSABASSO NORMALIZZATO



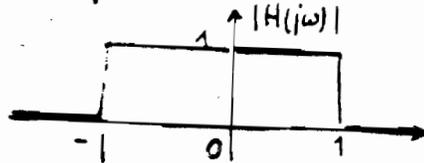
1) Tali caratteristiche sono teoricamente irrealizzabili (infatti risulterebbe che il circuito risponde prima che sia applicato lo stimolo)

2) Mediante funzioni stabili e a fase minima non è

possibile approssimare contemporaneamente modulo e argomento.

3) Volendo usare d. bip. LC a scala allora ci si deve accontentare di approssimare solo il modulo o solo l'argomento; l'altra funzione viene quella che viene e può essere ritoccata con equalizzatori in cascata. (le reti LC a scala non possono realizzare z.d.t. a destra e quindi funzioni non a fase minima)

Ci limiteremo ad approssimare il modulo (filtri d'ampiezza)



2.5.- Normalizzazione delle reti e delle funzioni di rete.

Nello studio di una rete è molto utile condurre i calcoli non sulla rete effettiva, ma su un'altra, detta normalizzata, o ridotta, che ha la stessa configurazione di quella data, nella quale però tutti gli elementi hanno subito una variazione di scale; con altre parole si può anche dire che gli elementi sono valutati in base a nuove unità di misura; (¹). Un secondo tipo di normalizzazione può riguardare la frequenza, ed infine entrambe le normalizzazioni possono essere applicate contemporaneamente. Una rete ridotta può assimilarsi ai cosiddetti "modelli" che s'incontrano per esempio in meccanica o in altri campi della tecnica.

Da questo modo di procedere si possono trarre due vantaggi. Anzi tutto un vantaggio materiale nei calcoli, potendosi per questa via eliminare in gran parte le noiose potenze di dieci che diversamente figurano di solito nelle espressioni numeriche. In secondo luogo, quando si sia progettata una rete normalizzata se ne possono da questa dedurre immediatamente altre che riproducono lo stesso comportamento in un diverso campo di frequenze o su un diverso livello medio di valori delle impedenze. In tal modo i calcoli, spesso laboriosi, effettuati una volta per risolvere un particolare problema possono essere ancora adoperati senza fatica per risolvere un altro problema simile.

Si consideri una rete RCLM generica (fig. 1a), e sia R_0 un valore arbitrario di resistenza, eventualmente quello stesso di uno dei resistori della rete; ovvero, se si preferisce, si può considerare R_0 anche come una costante reale priva di dimensioni. Nella rete in esame si dividano tutte le resistenze R_i , le induttanze L_i , le mutue induttanze M_i per R_0 , e si moltiplichino tutte le capacità C_i per R_0 , infine si lascino inalterati i rapporti di trasformazione K_i di eventuali trasformatori ideali. I nuovi elementi:

$$(1) \quad r_i = R_i/R_0, \quad l_i = L_i/R_0, \quad m_i = M_i/R_0, \quad c_i = C_i R_0, \quad k_i = K_i,$$

(¹) Qualcosa del genere è già stato fatto nel capitolo 1 per i risonatori.

Estratto da: M. Soldi, "Teoria delle reti elettriche",
Vol I, CLUT, 1985, Torino.

rete effettiva

rete normalizzata

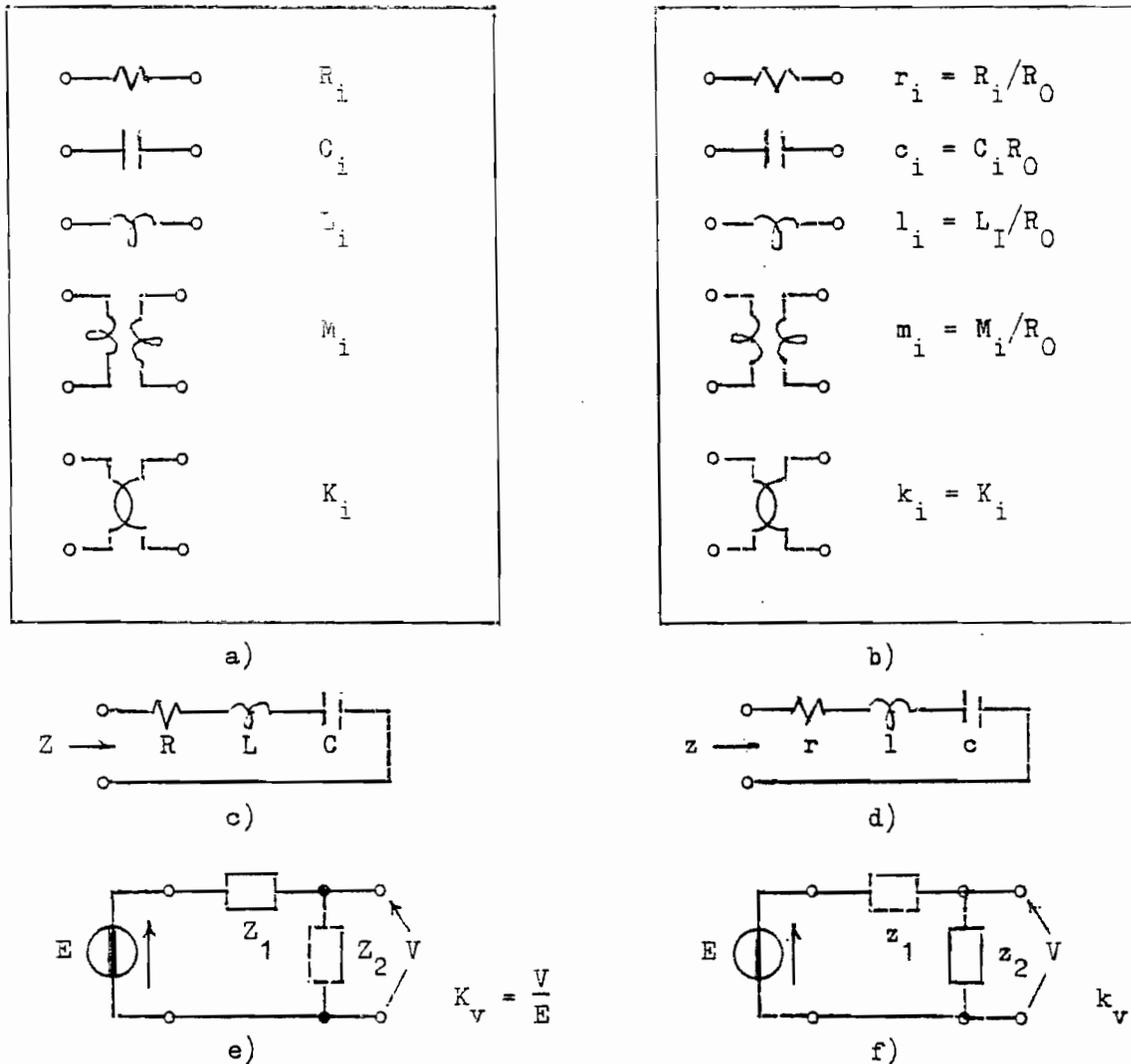


fig. 1

si dicono elementi normalizzati, o ridotti, rispetto a R_0 , e la rete con la stessa configurazione di quella data, e con i nuovi valori degli elementi (fig. 1b) si chiama rete normalizzata, o ridotta, rispetto a R_0 .

Con riferimento alla fig. 1c, sia $Z = R + pL + 1/pC$ l'impedenza di un ramo della rete effettiva; il corrispondente ramo della rete normalizzata (fig. 1d) ha un'impedenza:

$$z = r + pl + \frac{1}{pc} = \frac{R}{R_0} + \frac{pL}{R_0} + \frac{1}{pCR_0}$$

e quindi si ha:

$$(2a) \quad z = \frac{Z}{R_0} .$$

È intuitivo che più in generale la (2a) esprime il rapporto fra le impedenze d'entrata della rete effettiva e di quella ridotta che si hanno per tutte le coppie di morsetti corrispondenti nelle due reti. Di ciò è possibile dare dimostrazione completa, per esempio scrivendo le espressioni delle impedenze col metodo dei nodi; dato lo scarso interesse concettuale la dimostrazione viene omessa.

Dalla (2a) segue che le parti reale ed immaginaria ed il modulo di una z della rete ridotta sono uguali alle corrispondenti grandezze della Z per la rete effettiva, divise tutte per R_0 . Al contrario l'argomento di una z , essendo definito mediante il rapporto fra due delle suddette grandezze, risulta uguale a quello di Z . Quanto alle ammettenze effettive Y , e ridotte y , di particolari rami, ovvero all'entrata fra due morsetti generici, si ha evidentemente:

$$(2b) \quad y = Y R_0 .$$

Passando ad altri tipi di funzioni di rete, come quelle di trasmissione, è intuitivo che le relazioni (2a,b) valgono ancora fra le funzioni delle reti effettiva e ridotta quando tali funzioni hanno le dimensioni di un'impedenza o di un'ammettenza. Rimane invece inalterata ogni funzione di trasmissione priva di dimensioni, quale il rapporto fra due tensioni o correnti in un doppio bipolo. Come esempio semplice, per i rapporti di tensione K_v e k_v delle reti effettiva e ridotta nelle fig. 1e,f si ha:

$$k_v = \frac{z_2}{z_1 + z_2} = \frac{Z_2}{R_0} \cdot \frac{1}{\frac{Z_1}{R_0} + \frac{Z_2}{R_0}} = K_v ;$$

è facile comprendere che la proprietà vale in generale.

Quanto detto sopra giustifica il fatto che i rapporti di trasformazione dei trasformatori ideali devono essere gli stessi nella rete effettiva ed in quella ridotta; tali parametri sono infatti definiti come rapporti delle tensioni (o correnti) all'entrata ed all'uscita, e sono quindi fun-

zioni di trasmissione (costanti) prive di dimensioni; ⁽¹⁾).

Quando nei calcoli si adoperino prevalentemente le ammettenze è preferibile normalizzare la rete rispetto ad una conduttanza G_0 ; posto $G_i = 1/R_i$ come elementi normalizzati si assumono:

$$(3) \quad g_i = G_i/G_0, \quad c_i = C_i/G_0, \quad l_i = L_i G_0, \quad m_i = M_i G_0, \quad k_i = K_i.$$

Ovviamente tutte le funzioni di rete aventi le dimensioni di un'ammettenza o di un'impedenza valgono ora:

$$(4a,b) \quad y = \frac{Y}{G_0}, \quad z = Z G_0$$

le funzioni di rete prive di dimensioni restano al solito inalterate.

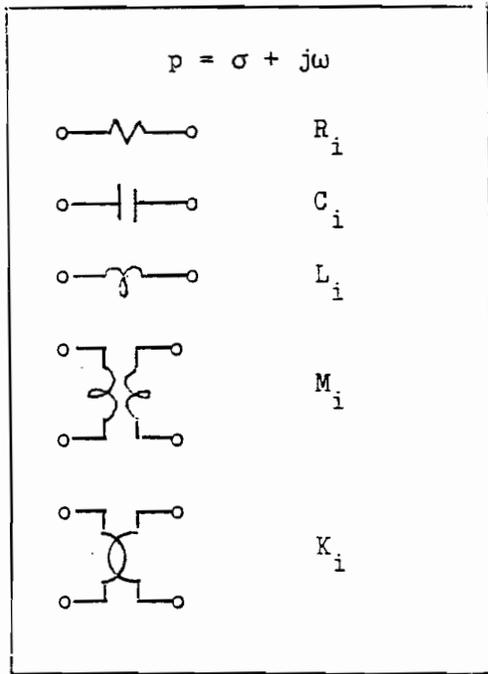
I risultati trovati sopra si possono riassumere in generale con altre parole anche nel seguente modo:

- (5) - Se in una rete si moltiplicano (si dividono) tutte le resistenze, induttanze, mutue induttanze per una costante, si dividono (si moltiplicano) tutte le conduttanze e capacità per la stessa costante, e si lasciano inalterati i rapporti di trasformazione dei trasformatori ideali, allora tutte le funzioni di rete aventi le dimensioni di un'impedenza risultano moltiplicate (divise), quelle aventi le dimensioni di un'ammettenza risultano divise (moltiplicate) per la stessa costante, quelle prive di dimensioni restano invariate.

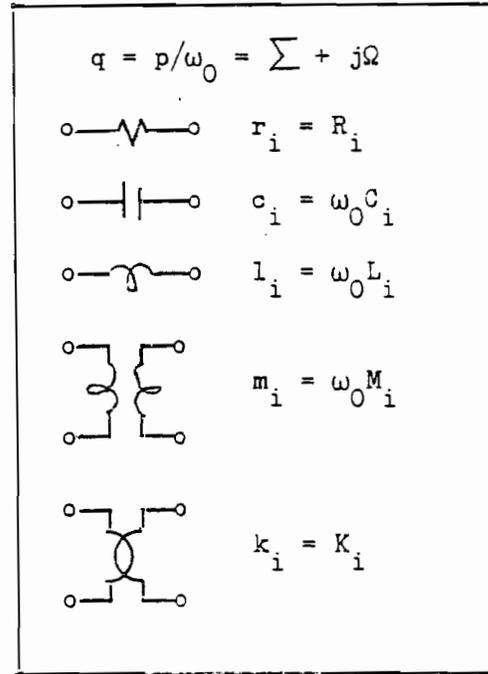
Un secondo tipo di normalizzazione può farsi nei riguardi della frequenza. Scelta una certa ω_0 di riferimento si normalizzano anzi tutto le pulsazioni assumendo come pulsazione complessa normalizzata la variabile

⁽¹⁾ Per un trasformatore puramente induttivo il rapporto delle tensioni primaria e secondaria a vuoto vale: L_1/M , essendo L_1 l'induttanza primaria a vuoto e M l'induttanza mutua. Per la rete ridotta lo stesso rapporto vale: $l_1/m = (L_1/R_0)/(M/R_0) = L_1/M$, e coincide con quello della rete effettiva. La stessa relazione si deve verificare anche per il rapporto di trasformazione del trasformatore ideale, che è un caso limite di quello puramente induttivo.

rete effettiva



rete normalizzata



a)

fig. 2

b)

(6a)

$$q = \frac{p}{\omega_0} = \Sigma + j\Omega \quad ,$$

e come pulsazione reale normalizzata la

(6b)

$$\Omega = \frac{\omega}{\omega_0} \quad .$$

Si normalizza poi anche la rete effettiva (fig. 2a) sostituendo in essa al posto delle C_i , L_i , M_i i seguenti elementi normalizzati (fig. 2b) :

$$(7) \quad c_i = \omega_0 C_i, \quad l_i = \omega_0 L_i, \quad m_i = \omega_0 M_i, \quad ,$$

e lasciando inalterate resistenze e rapporti di trasformazione di trasformatori ideali, i cui valori non dipendono dalla frequenza. Alla ω_0 se si preferisce si può dare anche il significato di una costante reale priva di dimensioni.

Nella rete vera si consideri un ramo come quello della fig. 1c, e sia ancora Z l'impedenza di tale ramo per un generico valore di p ; si indichi poi con z l'impedenza del corrispondente ramo normalizzato per $q = p/\omega_0$; essa vale:

$$z = r + ql + \frac{1}{qc} = R + \frac{p}{\omega_0} \omega_0 L + \frac{1}{\frac{p}{\omega_0} \omega_0 C} = R + pL + \frac{1}{pC} = Z \quad .$$

E cioè un'impedenza z della rete ridotta alla pulsazione complessa normalizzata q è uguale all'impedenza corrispondente Z della rete vera alla pulsazione complessa vera $p = \omega_0 q$; in particolare la z per una pulsazione reale normalizzata Ω è uguale alla Z per una pulsazione reale $\omega = \omega_0 \Omega$.

Evidentemente questo risultato vale per qualunque impedenza d'entrata delle due reti, la effettiva e la ridotta, e così pure per tutte le altre funzioni di rete, comprese quelle di trasmissione, di tutti i tipi.

I risultati a cui si è pervenuti si possono esprimere in altra forma dicendo che:

- (3) - Se in una rete si moltiplicano (si dividono) tutte le capacità, induttanze, mutue induttanze per una costante, e si lasciano inalterate le resistenze, conduttanze e rapporti di trasformazione di trasformatori ideali, tutte le curve di risposta delle rete, cioè tutti i diagrammi di grandezze caratteristiche della rete in funzione di ω , valgono ancora dividendo (moltiplicando) le ω riportate in ascissa per la stessa costante.

Praticamente se una curva di risposta è tracciata riportando le pulsazioni (più comunemente le frequenze) in scala logaritmica, come spesso avviene, il cambiamento di scale corrisponde semplicemente ad una traslazione orizzontale del diagramma.

Un terzo modo di normalizzazione di una rete consiste nell'effettuare contemporaneamente le due precedenti. Come prima si assume una pulsazione complessa normalizzata $q = p/\omega_0$, e fissata anche una resistenza R_0 di riferimento, si assumono come elementi della rete ridotta i seguenti:

$$(9) \quad \begin{aligned} r_i &= R_i/R_0, & l_i &= \omega_0 L_i/R_0, & m_i &= \omega_0 M_i/R_0, \\ c_i &= \omega_0 C_i R_0, & k_i &= K_i. \end{aligned}$$

Evidentemente in questo caso una qualsiasi impedenza ridotta z alla pulsazione normalizzata q è uguale alla corrispondente Z della rete vera al-

la puzazione $p = \omega_0 q$, divisa per R_0 ; trattandosi invece di una funzione priva di dimensioni, questa rimarrebbe invece inalterata.

Il presente tipo di normalizzazione si adopera assai spesso in pratica; se in un problema di progetto si conducono tutti i calcoli sulla rete normalizzata fino alla determinazione degli elementi, quelli della rete vera dalle (9) risultano:

$$(10) \quad \begin{aligned} R_i &= r_i R_0, & L_i &= l_i R_0 / \omega_0, & M_i &= m_i R_0 / \omega_0, \\ C_i &= c_i / \omega_0 R_0, & K_i &= k_i. \end{aligned}$$

Naturalmente per la rete ridotta le curve di risposta da assumere come dati del problema devono essere previamente normalizzate secondo le regole precedenti.

È ovvio che se nelle (10) si pone $R_0 = 1$, oppure $\omega_0 = 1$, si hanno le formule di passaggio per il caso in cui si adotta una sola delle due normalizzazioni.

Filtri di BUTTERWORTH

$$|H(j\Omega)|^2 = \frac{M}{1 + \underbrace{\varepsilon^2 \Omega^{2n}}_{|h(j\Omega)|^2}} \quad (M=1)$$

$$\alpha(\Omega) = 10 \log [1 + \varepsilon^2 \Omega^{2n}]$$

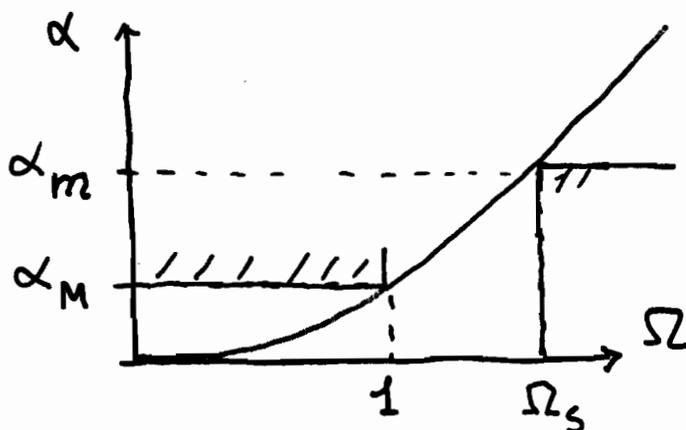
Criteri di progetto:

$$|\varepsilon| = \sqrt{10^{0.1 \alpha_M} - 1}$$

$$n \geq \frac{\log \left(\sqrt{10^{0.1 \alpha_M} - 1} / \varepsilon \right)}{\log \Omega_s} \approx \frac{\alpha_m - 20 \log \varepsilon}{20 \log \Omega_s}$$

L'eq. da risolvere per trovare $g(s)$ è:

$$1 + (-1)^n \varepsilon^2 s^{2n}$$



• Filtri di Chebyshev

Si assume

$$|h(j\Omega)|^2 = \varepsilon^2 [T_n(\Omega)]^2$$

polinomio di Chebyshev
di ordine n

$$T_n(\Omega) = \cos(n \arccos \Omega) = \quad |\Omega| < 1$$
$$= \cosh(n \operatorname{arccosh} \Omega)$$

$$T_0(\Omega) = 1$$

$$T_1(\Omega) = \Omega$$

$$T_2(\Omega) = 2\Omega^2 - 1$$

Formula ricorrente:

$$T_k(\Omega) = 2\Omega T_{k-1}(\Omega) - T_{k-2}(\Omega)$$

k pari: polinomio pari

k dispari: polinomio dispari

continuazione analitica:

$$C_k(s) = j^k T_k(s/j)$$

$$C_0 = 1, \quad C_1 = s, \quad C_2 = 2s^2 + 1$$

$$C_k(s) = 2s C_{k-1}(s) + C_{k-2}(s)$$

tabella 1

$T_n(\omega)$	n	$C_n(p)$
1	0	1
ω	1	p
$2\omega^2 - 1$	2	$2p^2 + 1$
$4\omega^3 - 3\omega$	3	$4p^3 + 3p$
$8\omega^4 - 8\omega^2 + 1$	4	$8p^4 + 8p^2 + 1$
$16\omega^5 - 20\omega^3 + 5\omega$	5	$16p^5 + 20p^3 + 5p$
$32\omega^6 - 48\omega^4 + 18\omega^2 - 1$	6	$32p^6 + 48p^4 + 18p^2 + 1$
$64\omega^7 - 112\omega^5 + 56\omega^3 - 7\omega$	7	$64p^7 + 112p^5 + 56p^3 + 7p$
$128\omega^8 - 256\omega^6 + 160\omega^4 - 32\omega^2 + 1$	8	$128p^8 + 256p^6 + 160p^4 + 32p^2 + 1$

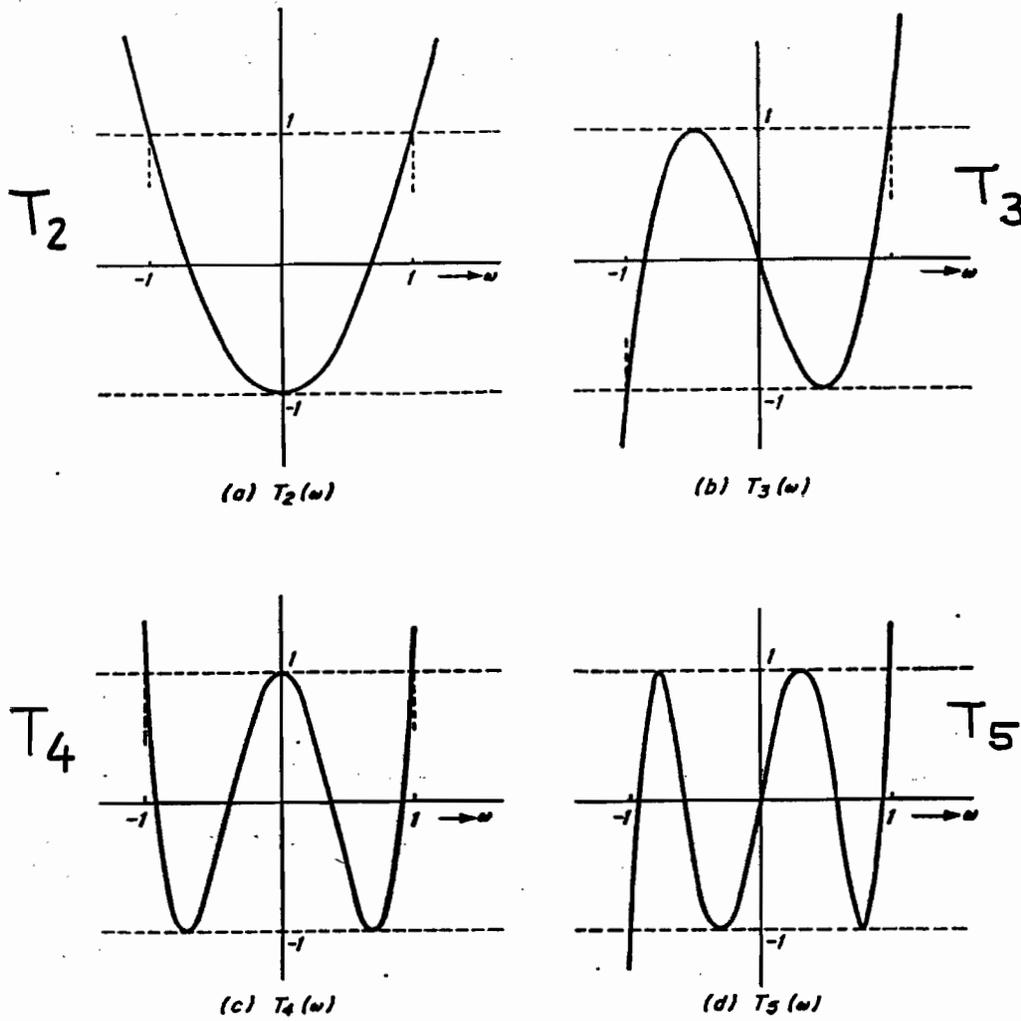
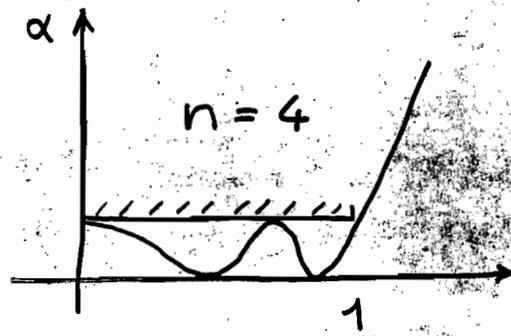
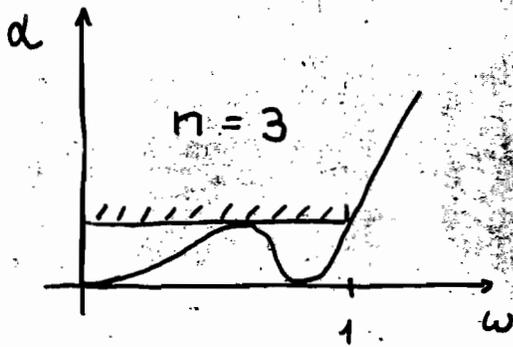


Fig. 9-8. Tchebyscheff polynomials.

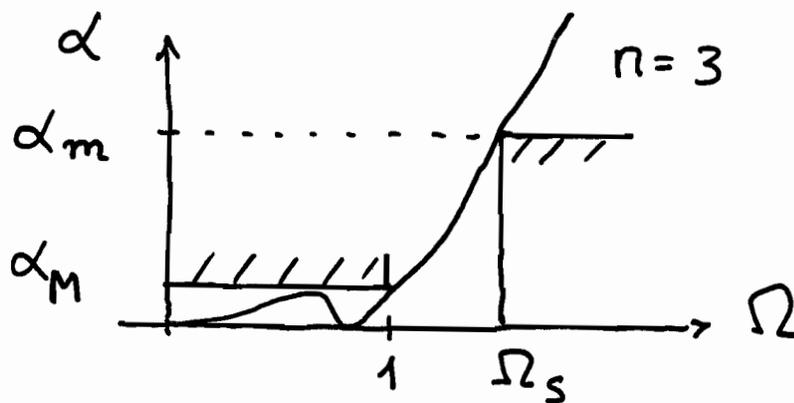
numero di oscillazioni = n



$$h(s) = \varepsilon C_n(s)$$

$$\alpha(\Omega) = 10 \log \left[1 + |h(j\Omega)|^2 \right] =$$

$$= 10 \log \left[1 + \varepsilon^2 T_n^2(\Omega) \right]$$



Criteri di progetto:

$$|\varepsilon| = \sqrt{10^{0.1\alpha_M} - 1}$$

$$n > \frac{\operatorname{arcosh} \left(\sqrt{10^{0.1\alpha_M} - 1} / |\varepsilon| \right)}{\operatorname{arcosh} \Omega_s}$$

$$\left(\operatorname{arcosh} x = \ln \left[x + \sqrt{x^2 - 1} \right] \right)$$

L'eq. da risolvere per ottenere $g(s)$ è:

$$1 + \varepsilon^2 C_n(s) C_n(-s) = 0$$

Ammette soluzioni esplicite:

$$s_k = -\sinh A \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n} + j \cosh A \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n}$$

$$A = \frac{1}{n} \operatorname{arsinh} |1/\varepsilon|$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

Esempio

$$\alpha \leq \alpha_m = 1 \text{ dB}$$

$$f \leq 10 \text{ kHz}$$

$$\alpha \geq \alpha_m = 15 \text{ dB}$$

$$f \geq 17 \text{ kHz}$$

$$\Omega_s = 17/10 = 1.7$$

$$|\varepsilon| = 0.50884$$

$$n \geq 2.74 \Rightarrow 3$$

Confronto Butterworth - Chebyshev

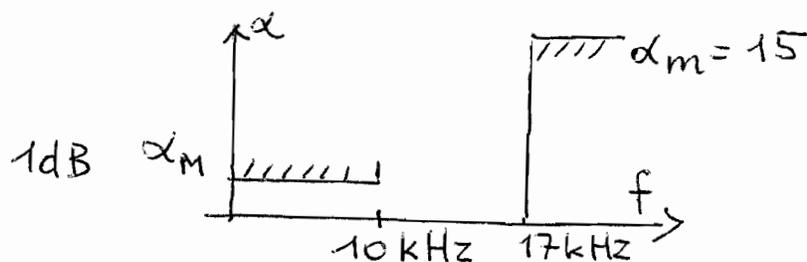
- I filtri di Butterworth e Chebyshev hanno un coeff. di trasmissione del tipo

$$t(p) = \frac{M}{g(p)}$$

ove $g(p)$ è un polinomio in p . Essi appartengono alla famiglia dei FILTRI POLINOMIALI (al contrario dei filtri alla CAUER, ove $t(p)$ è un rapporto di due polinomi).

• SELETTIVITA'

Si consideri il filtro con le seguenti caratteristiche



- Usando una curva di risposta alla Chebyshev si ottiene

$$n = 3, \quad |\epsilon| = 0,50884$$

- Usando Butterworth:

$$n \gg \frac{\alpha_m - 20 \log \epsilon}{20 \log \Omega_s} = \frac{15 - 20 \log 0,50884}{20 \log 1,7} = \frac{20,87}{4,61} = 4,53$$

da cui

$$n = 5$$

- Per ottenere la stessa selettività, un filtro alla Butterworth richiede un valore di n ben più elevato rispetto ad un filtro alla Chebyshev.

- Si può dimostrare che, a parità di specifiche in banda passante, i filtri di Chebyshev sono i filtri più selettivi entro la famiglia dei filtri polinomiali.
 - Maggiori selettività possono essere ottenute ricorrendo a funzioni di trasmissione date dal rapporto di due polinomi, come nel caso dei filtri ellittici (o "alla CAUER")
 - Il prezzo pagato per la maggior selettività dei filtri alla Chebyshev è duplice:
 - a) valori del Q dei poli più elevati (il che porta a realizzazioni RC-attive più critiche)
 - b) andamento della curva di fase meno lineare in banda passante, rispetto ad un Butterworth di pari grado.
- (Cfr. Schaumann - Van Valkenburg, Sec. 7-4)

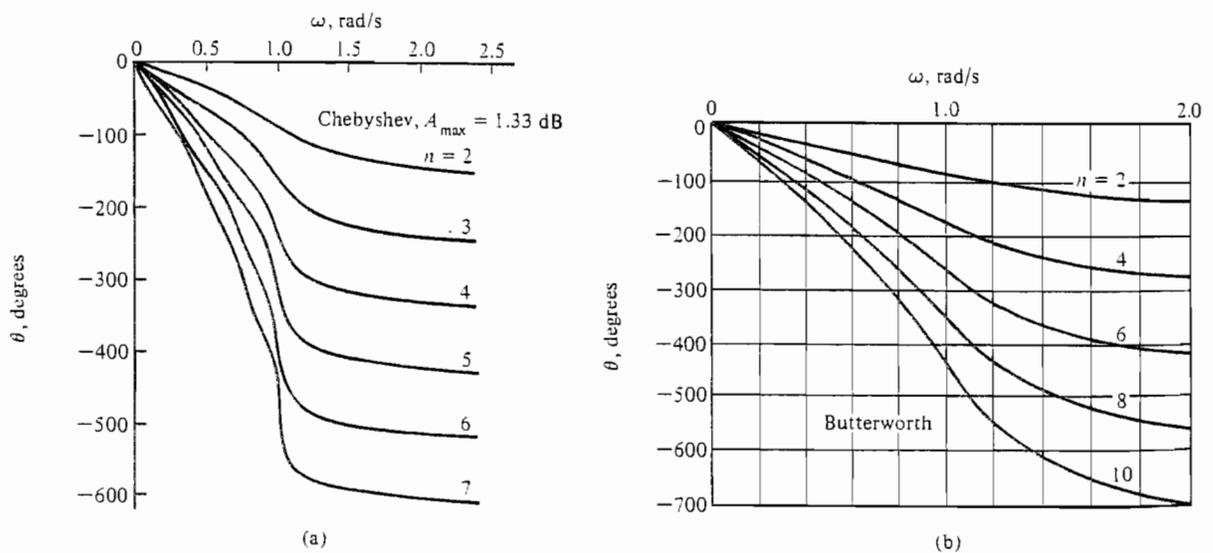
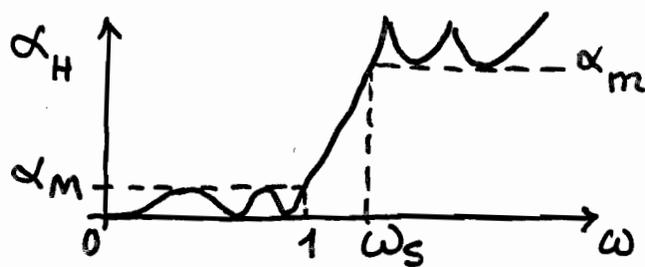


Figure 7.9 Chebyshev (a) and Butterworth (b) phase responses.

• Filtri ellittici (o di CAUER)

Per il loro progetto si ricorre a funzioni particolari, dette funzioni ellittiche

Andamento tipico dell'attenuazione:



Progetto reso semplice dall'uso di manuali

SINTESI

Svariate possibilità:

- doppi bipoli LC (passivi)
- cascata di celle biquadratiche (RC-attivi)
- celle RC-attive che simulano il filtro LC

• DOPPI BIPOLI LC

Progetto elementare mediante l'uso di manuali, che forniscono i valori di L e C

• CELLE BIQUADRATICHE RC-ATTIVE IN CASCATA

Progetto elementare delle singole celle, usando i valori di poli e zeri forniti dai manuali

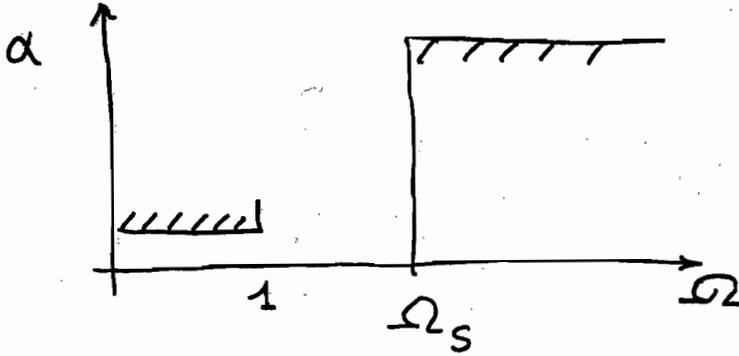
AEG-TELEFUNKEN

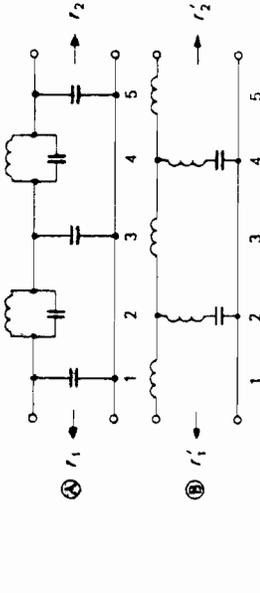
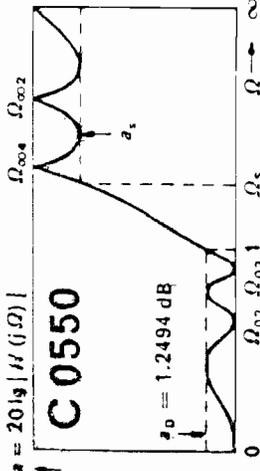
Nachrichtentechnik
Telecommunication

Rudolf Saal
Handbuch zum Filterentwurf
Handbook of Filter Design



$$\theta = \frac{180^\circ}{\pi} \arcsin \frac{1}{\Omega_s}$$





$$H(p) = C \prod_{v=1}^2 (\rho^2 - 2\alpha_v \rho + \gamma_v)$$

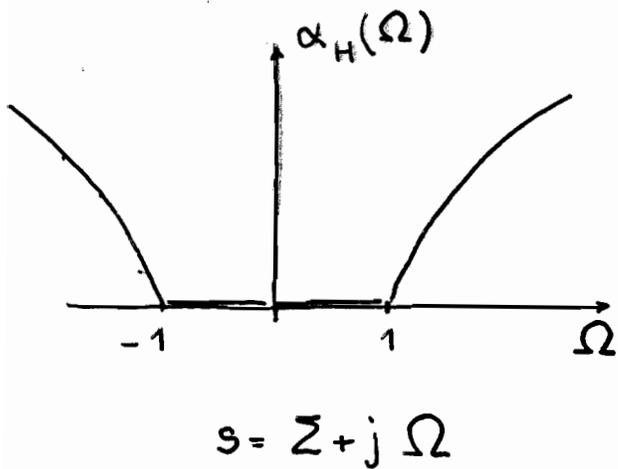
$$\gamma_v = \alpha_v^2 + \beta_v^2$$

θ	Ω_s	a_s dB	γ	$r_1 = 1$	$r_2 = 1$	$r_1 = \infty$	$r_2 = 1$	$\Omega_{\infty 2v}$	$\Omega_{\infty 2v}$	Ω_{0v}	α_v	β_v	C
				c_{2v-1}	l_{2v}	c_{2v}	l_{2v}						
P				1.384332	1.518136	1.518136	1.518136	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	1.1161231740	0.0000000000	0.577350269
1				1.238184	0.801370	0.801370	0.801370	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.9029626156	0.6560407414	0.577350269
2				0.276866				0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.3449010286	1.0614962176	0.577350269
T				1.723964	1.566749	1.566749	1.566749	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.2664476314	0.0000000000	9.231604307
1				2.073202	1.431461	1.431461	1.431461	0.571823232	0.571823232	0.571823232	0.2155506619	0.6082522358	9.231604307
2				1.159766				0.9810695163	0.9810695163	0.9810695163	0.0823368462	0.9842375126	9.231604307
31	2.790428110	86.5		1.700669	1.520802	0.030498	4.643394870	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.2763617765	0.0000000000	1565.054304525
1				1.984124	1.319009	0.088635	2.974647748	0.609586270	0.609586270	0.609586270	0.2149455780	0.6743244795	1565.054304525
2				1.077323				0.9541074174	0.9541074174	0.9541074174	0.0770841675	0.9851119949	1565.054304525
3				1.693364	1.517250	0.031549	4.432336604	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.2773653250	0.0000000000	1565.054304525
22	2.468467183	84.4		1.975522	1.308131	0.097716	2.796996367	0.8022708584	0.8022708584	0.8022708584	0.1148881749	0.4315220543	1293.444051609
1				1.069276				0.9544049445	0.9544049445	0.9544049445	0.0765720523	0.9860718296	1293.444051609
2				1.695944	1.513523	0.036757	4.239719400	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.2784230156	0.0000000000	1077.605294734
3				1.965539	1.296763	0.107311	2.680898497	0.6036495389	0.6036495389	0.6036495389	0.2147836653	0.6726006108	1077.605294734
3				1.060853				0.9547163090	0.9547163090	0.9547163090	0.0760361493	0.9862384332	1077.605294734
24	2.454503336	80.5		1.493410	1.509621	0.040124	4.063149555	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.2796558033	0.0000000000	904.395687165
1				1.957176	1.284909	0.117435	2.574331394	0.6050545457	0.6050545457	0.6050545457	0.2146915158	0.6293610395	904.395687165
2				1.062053				0.9550415076	0.9550415076	0.9550415076	0.0764284684	0.9864117118	904.395687165
3				1.890759	1.505540	0.043684	3.900700283	0.0606060000	0.0606060000	0.0606060000	0.2807049151	0.0000000000	764.142987669
1				1.847437	1.272569	0.128104	2.478711104	0.6060843005	0.6060843005	0.6060843005	0.2148911548	0.6312045223	764.142987669
2				1.042875				0.9553905388	0.9553905388	0.9553905388	0.0748830250	0.9855150685	764.142987669
3				1.687990	1.501279	0.047348	3.750741203	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.2819316086	0.0000000000	649.635534078
1				1.937325	1.259746	0.139339	2.366424852	0.6081923303	0.6081923303	0.6081923303	0.2144819720	0.6331319339	649.635534078
2				1.033319				0.9557333910	0.9557333910	0.9557333910	0.0742588311	0.9867778935	649.635534078
3				1.885103	1.496937	0.051210	3.611883354	0.0600000000	0.0600000000	0.0600000000	0.2821272151	0.0000000000	553.434260726
1				1.928043	1.246447	0.151156	2.303827126	0.6098400721	0.6098400721	0.6098400721	0.2143633161	0.6351444434	553.434260726
2				1.023383				0.9567000647	0.9567000647	0.9567000647	0.0736549051	0.9897058336	553.434260726
3				1.682098	1.492711	0.053243	3.482938168	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.2845631634	0.0000000000	477.391649067
1				1.915993	1.232670	0.163578	2.226071021	0.6115686207	0.6115686207	0.6115686207	0.2142444007	0.6377432149	477.391649067
2				1.013087				0.9564805507	0.9564805507	0.9564805507	0.0730002670	0.9871695224	477.391649067
3				1.678967	1.487399	0.059459	3.362873219	0.0000000000	0.0000000000	0.0000000000	0.2859709673	0.0000000000	412.313312709
1				1.940780	1.218419	0.176827	2.155827103	0.6133639912	0.6133639912	0.6133639912	0.2140947539	0.6342346639	412.313312709
2				1.002369				0.9568748403	0.9568748403	0.9568748403	0.07323219403	0.9873745903	412.313312709

θ	Ω_s	a_s dB	γ	$r_1 = 1$	$r_2 = 1$	$r_1 = \infty$	$r_2 = 1$	$\Omega_{\infty 2v}$	$\Omega_{\infty 2v}$	Ω_{0v}	α_v	β_v	C
				c_{2v-1}	l_{2v}	c_{2v}	l_{2v}						
1				1.449691	1.449691	1.449691	1.449691	1.449691	1.449691	1.449691	1.449691	1.449691	1.449691
2				0.553733	0.553733	0.553733	0.553733	0.553733	0.553733	0.553733	0.553733	0.553733	0.553733
3				1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140
1				1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140	1.035140
2				0.045966	0.045966	0.045966	0.045966	0.045966	0.045966	0.045966	0.045966	0.045966	0.045966
3				0.121400	0.121400	0.121400	0.121400	0.121400	0.121400	0.121400	0.121400	0.121400	0.121400
1				0.050575	0.050575	0.050575	0.050575	0.050575	0.050575	0.050575	0.050575	0.050575	0.050575
2				0.133702	0.133702	0.133702	0.133702	0.133702	0.133702	0.133702	0.133702	0.133702	0.133702
3				0.168226	0.168226	0.168226	0.168226	0.168226	0.168226	0.168226	0.168226	0.168226	0.168226
1				0.055424	0.055424	0.055424	0.055424	0.055424	0.055424	0.055424	0.055424	0.055424	0.055424
2				0.146672	0.146672	0.146672	0.146672	0.146672	0.146672	0.146672	0.146672	0.146672	0.146672
3				0.180326	0.180326	0.180326	0.180326	0.180326	0.180326	0.180326	0.180326	0.180326	0.180326
1				0.065857	0.065857	0.065857	0.065857	0.065857	0.065857	0.065857	0.065857	0.065857	0.065857
2				0.174682	0.174682	0.174682	0.174682	0.174682	0.174682	0.174682	0.174682	0.174682	0.174682
3				0.216183	0.216183	0.216183	0.216183	0.216183	0.216183	0.216183	0.216183	0.216183	0.216183
1				0.071450	0.071450	0.071450	0.071450	0.071450	0.071450	0.071450	0.071450	0.071450	0.071450
2				0.189756	0.189756	0.189756	0.189756	0.189756	0.189756	0.189756	0.189756	0.189756	0.189756
3				0.239430	0.239430	0.239430	0.239430	0.239430	0.239430	0.239430	0.239430	0.239430	0.239430
1				0.077300	0.077300	0.077300	0.077300	0.077300	0.077300	0.077300	0.077300	0.077300	0.077300
2				0.205568	0.205568	0.205568	0.205568	0.205568	0.205568	0.205568	0.205568	0.205568	0.205568
3				0.250110	0.250110	0.250110	0.250110	0.250110	0.250110	0.250110	0.250110	0.250110	0.250110
1				0.082411	0.082411	0.082411	0.082411	0.082411	0.082411	0.082411	0.082411	0.082411	0.082411
2				0.223142	0.223142	0.223142	0.223142	0.223142	0.223142	0.223142	0.223142	0.223142	0.223142
3				0.271192	0.271192	0.271192	0.271192	0.271192	0.271192	0.271192	0.271192	0.271192	0.271192
1				0.088781	0.088781	0.088781	0.088781	0.088781	0.088781	0.088781	0.088781	0.088781	0.088781
2				0.239498	0.239498	0.239498	0.239498	0.239498	0.239498	0.239498	0.239498	0.239498	0.239498
3				0.289456	0.289456	0.289456	0.289456	0.289456	0.289456	0.289456	0.289456	0.289456	0.289456

C 0550

TRASFORMAZIONI DI FREQUENZA



$H(s)$ può essere K, t, Z_m ecc.

$$\alpha_H(\Omega) = 20 \log \frac{1}{|H(j\Omega)|}$$

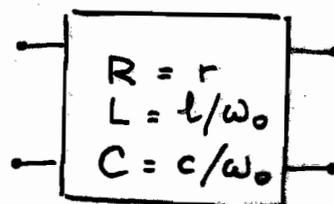
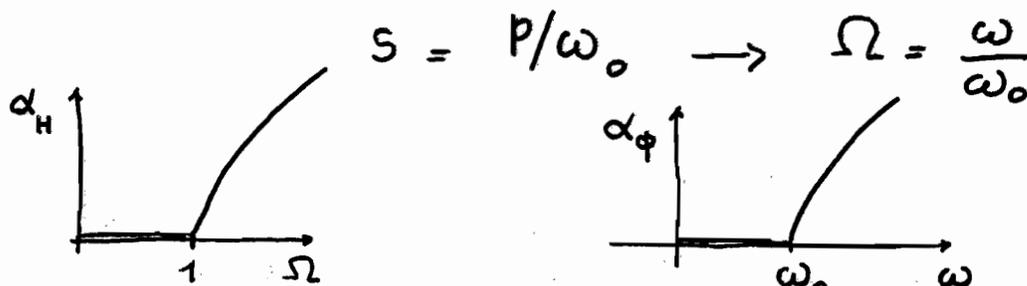
α_H è funzione pari di Ω

Idea: effettuare un cambiamento di variabile

$$s = F(p), \text{ con } p = \sigma + j\omega$$

in modo tale che la nuova funzione $\phi(p)$ abbia una curva $\alpha_\phi = 20 \log |\phi(j\omega)|^{-1}$ con le caratteristiche desiderate.

- passa basso normalizzato \rightarrow passa basso



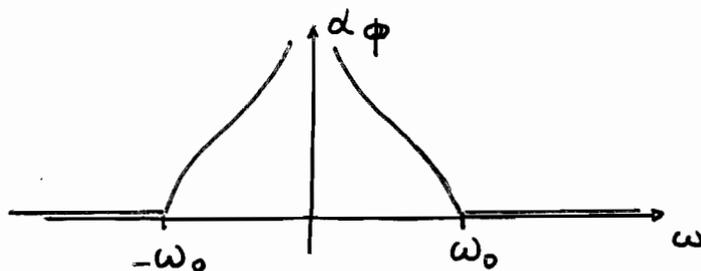
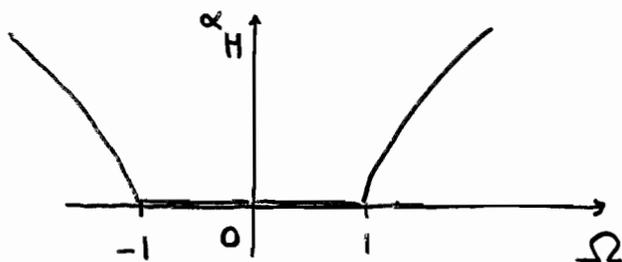
• passa basso normalizzato \rightarrow passa alto

$$S = \frac{\omega_0}{p}$$

$$\Omega = -\frac{\omega_0}{\omega}$$

(il meno non ha importanza, poiché α è pari)

Ω	ω
0	∞
1	ω_0
∞	0

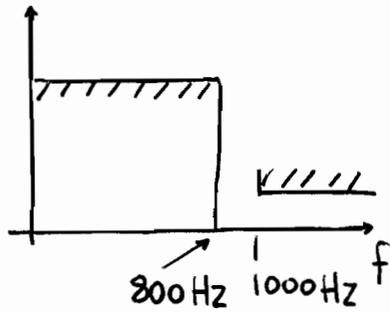


In coppie Ω, ω corrispondenti, le attenuazioni assumono valori identici

$$Y = sC \rightarrow \bar{Y} = \frac{\omega_0 C}{p} = \frac{1}{p/(\omega_0 C)} \quad ; \quad C \rightarrow L = \frac{1}{\omega_0 C}$$

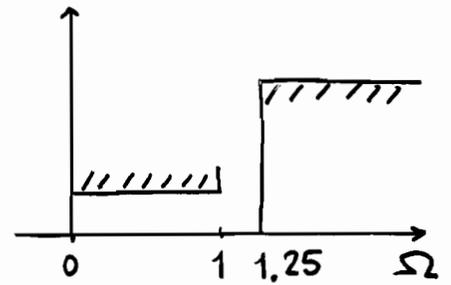
$$Z = sL \rightarrow \bar{Z} = \frac{\omega_0 L}{p} = \frac{1}{p/(\omega_0 L)} \quad ; \quad L \rightarrow C = \frac{1}{\omega_0 L}$$

Esempio

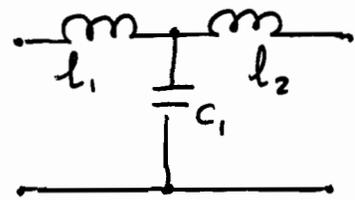
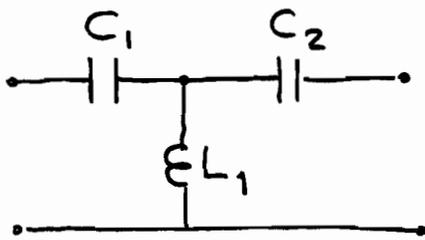


$$\Omega = \frac{f_0}{f}$$
$$f_0 = 1000$$

→



per sintesi



$$C_1 = 1/(\omega_0 l_1)$$

$$C_2 = 1/(\omega_0 l_2)$$

$$L_1 = 1/(\omega_0 c_1)$$

• Passa basso normalizzato \rightarrow passa banda

$$S = \left(\frac{\omega_0}{B} \right) \left(\frac{P}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{P} \right)$$

\swarrow
 $Q_0 = \frac{f_0}{f_a - f_b}$

$$B = \omega_a - \omega_b$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_a \omega_b}$$

$$\Omega = Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

Ad ogni Ω corrispondono due valori ω_1 e $\bar{\omega}_1$, tali che $\omega_1 \bar{\omega}_1 = \omega_0^2$ (simmetria geometrica)

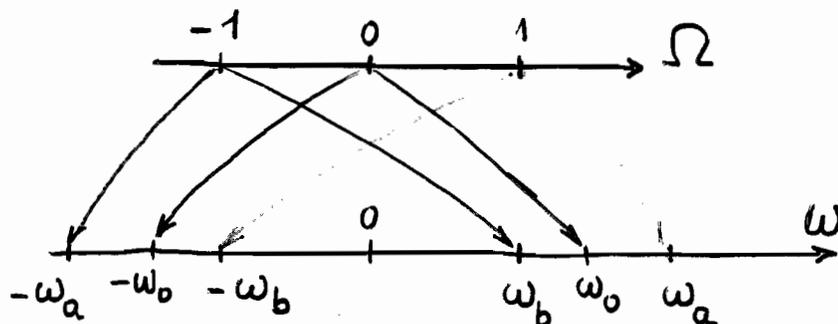
L'equazione da risolvere è:

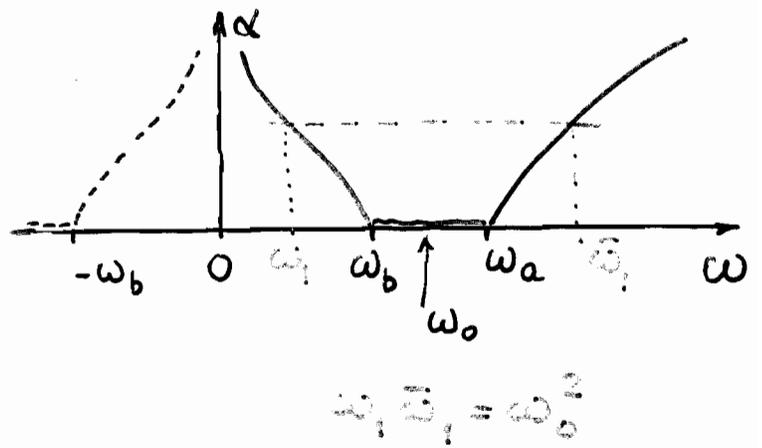
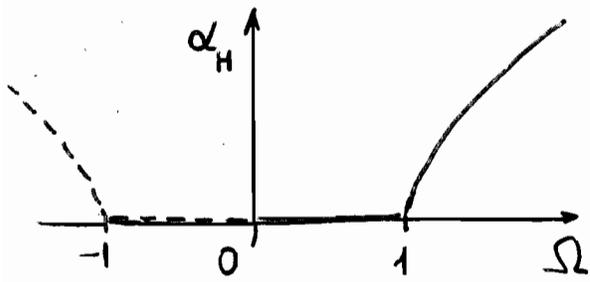
$$Q_0 \omega^2 - \Omega \omega_0 \omega - Q_0 \omega_0^2 = 0$$

ovvero:

$$\omega^2 - \Omega B \omega - \omega_0^2 = 0$$

corrispondenza tra Ω e ω :





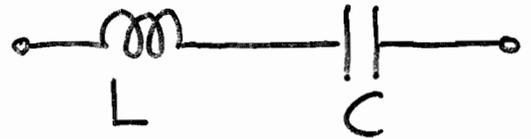
Inconvenienti:

- numero di elementi ridondante
- numero di L superiore al minimo indispensabile
- grande dispersione dei valori dei componenti
($\approx \omega_0/B \gg 1$)

Procedura:

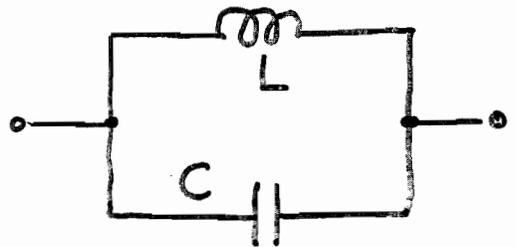
- Calcolare $\omega_0 = \sqrt{\omega_a \omega_b}$ e $B = \omega_a - \omega_b \rightarrow Q_0$
- Ricavare la maschera del corrispondente filtro passa basso normalizzato
- Sintetizzare il filtro passa basso
- Trasformare i componenti del passa basso

$$\text{---} \overset{l}{\text{---} \text{---} \text{---}} \text{---} \quad z = sl \quad \rightarrow \quad Z(p) = Q_0 \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right) l$$



$$L = \frac{Q_0 l}{\omega_0} \quad C = \frac{l}{Q_0 \omega_0}$$

$$\text{---} \overset{c}{\text{---} \text{---} \text{---}} \text{---} \quad y = sc \quad \rightarrow \quad Y(p) = Q_0 \left(\frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right) c$$



$$L = \frac{1}{Q_0 \omega_0 c} \quad C = \frac{Q_0 c}{\omega_0}$$

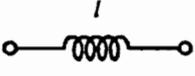
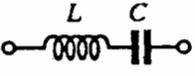
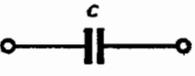
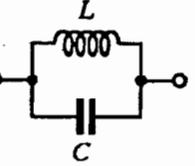
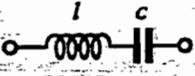
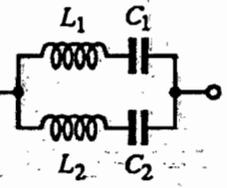
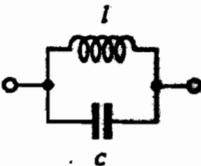
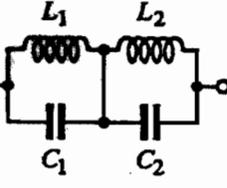
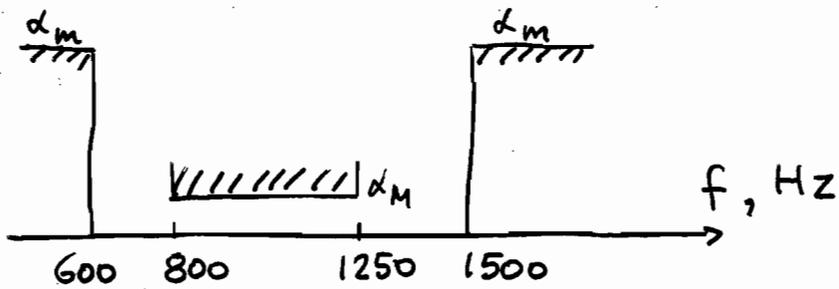
Componenti del filtro passabasso normalizzato		Componenti del filtro passabanda denormalizzato sia rispetto a ω_0 sia rispetto a R_0	
tipo	valori	tipo	valori
	l		$L = Q_0 l L_0$ $C = C_0 / (l Q_0)$
	c		$L = L_0 / (c Q_0)$ $C = c Q_0 C_0$
	l $c = \frac{1}{l \Omega_\infty^2}$		$L_1 = l L_0 Q_0 \left(1 + \frac{\omega_{\infty 2}^2}{\omega_0^2}\right)$ $C_1 = \frac{1}{L_1 \omega_{\infty 1}^2}$ $L_2 = l L_0 Q_0 \left(1 + \frac{\omega_{\infty 1}^2}{\omega_0^2}\right)$ $C_2 = \frac{1}{L_2 \omega_{\infty 2}^2}$
	c $l = \frac{1}{c \Omega_\infty^2}$		$C_1 = c C_0 Q_0 \left(1 + \frac{\omega_{\infty 2}^2}{\omega_0^2}\right)$ $L_1 = \frac{1}{C_1 \omega_{\infty 1}^2}$ $C_2 = c C_0 Q_0 \left(1 + \frac{\omega_{\infty 1}^2}{\omega_0^2}\right)$ $L_2 = \frac{1}{C_2 \omega_{\infty 2}^2}$
$L_0 = R_0 / \omega_0$	$C_0 = \frac{1}{R_0 \omega_0}$	$x = 1 + \Omega_\infty^2 / 2Q_0^2$	$\omega_{\infty 1,2}^2 = \omega_0^2 (x \pm \sqrt{x^2 - 1})$

Tabella 18.6.3.1 - Trasformazione circuitale passabasso - passabanda

18.18

$$Q_0 = \frac{f_0}{f_a - f_b}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\omega_a \omega_b}$$

Esempio



$$f_0 = \sqrt{800 \times 1250} = 1000$$

$$B = 2\pi(1250 - 800) = 2\pi \times 450$$

$$Q_0 = \frac{\omega_0}{B} = 2.222$$

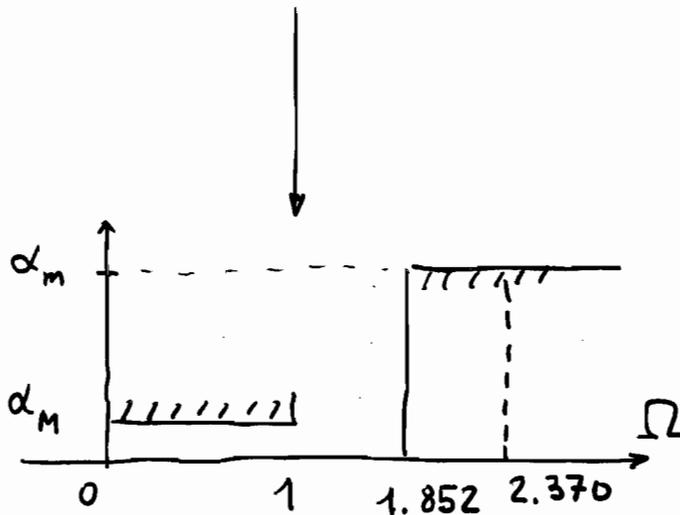
$$\Omega = Q_0 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)$$

$$\omega = 2\pi \cdot 1500 :$$

$$\Omega = 2.222 \left(\frac{1500}{1000} - \frac{1000}{1500} \right) = 1.852$$

$$\omega = 2\pi \cdot 600 :$$

$$\Omega = 2.222 \left(\frac{600}{1000} - \frac{1000}{600} \right) = -2.370$$



1 Trasformazione passa basso - passa banda: calcolo delle radici del passa banda

Si indichi con $s = \Sigma + j\Omega$ la pulsazione del filtro passa basso normalizzato e con $p = \sigma + j\omega$ la corrispondente pulsazione del passa banda.

La trasformazione passa basso - passa banda è data da

$$s = Q_0 [p/\omega_0 + \omega_0/p]$$

ove

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\omega_2\omega_3}, \quad Q_0 = \omega_0/(\omega_3 - \omega_2) = f_0/(f_3 - f_2)$$

essendo f_2 e f_3 rispettivamente le frequenze di taglio inferiore e superiore della banda passante, come indicato in figura 1.

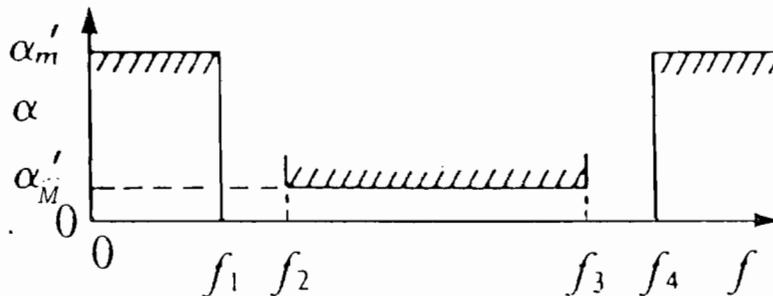


Figura 1. Specifiche del filtro passa banda

Indicato con $s_r = \Sigma_r + j\Omega_r$, (Σ_r con segno e $\Omega_r > 0$) un generico polo o zero del passa basso, i corrispondenti poli della funzione passa banda si ottengono risolvendo l'equazione:

$$p^2 - s_r \frac{\omega_0}{Q_0} p + \omega_0^2 = 0$$

Le radici sono date da:

$$p_{1,2} = \frac{\omega_3 - \omega_2}{2} \left[\Sigma_r + j\Omega_r \pm \sqrt{-[\Omega_r^2 - \Sigma_r^2 + 4Q_0^2] + j2\Sigma_r\Omega_r} \right]$$

Calcolando la radice del numero complesso che appare nella formula precedente, badando di evitare la differenza tra quantità molto grandi e circa uguali, si ottiene :

$$p_1 = \frac{\omega_3 - \omega_2}{2} \left[\Sigma_r + \frac{Y}{2V} + j(\Omega_r + V) \right]$$

$$p_2 = \frac{\omega_3 - \omega_2}{2} \left[\Sigma_r - \frac{Y}{2V} + j(\Omega_r - V) \right]$$

ove

$$X = [\Omega_r^2 - \Sigma_r^2 + 4Q_0^2], \quad Y = 2\Sigma_r\Omega_r, \quad V = \left[\frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2} \right]^{1/2}$$

Se si considera la radice complessa coniugata $\Sigma_r - j\Omega_r$, si ottengono le altre due radici p_3 e p_4 che sono le complesse coniugate di quelle trovate.

Table 1.1
Formulas for the Computation of the Transformed Transfer Functions, Starting from the Attenuation Specification

Frequency Transformation	LOW PASS	HIGH PASS	BAND PASS	BAND STOP
Specification Diagram				
	$p = \sigma + j2\pi f$	$p = \sigma + j2\pi f, f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$	$p = \sigma + j2\pi f, f_0 = \sqrt{f_1 f_4}$ $= \sqrt{f_2 f_3}, B = (f_3 - f_2)/f_0$	$p = \sigma + j2\pi f, f_0 = \sqrt{f_1 f_4}$ $= \sqrt{f_2 f_3}, B = (f_4 - f_1)/f_0$
complex frequency s	$p/(2\pi f_1)$	$2\pi f_2/p$	$[p/(2\pi f_0) + 2\pi f_0/p]/B$	$B/[p/(2\pi f_0) + 2\pi f_0/p]$
normalized frequency Ω	f/f_1	f_2/f	$(f/f_0 - f_0/f)/B$	$B/(f/f_0 - f_0/f)$
nominal stopband edge Ω_i	f_2/f_1		$(f_4 - f_1)/(f_3 - f_2)$	
choice of p_M and Θ	choose	choose	p_M and Θ such that $p_M \leq p'_M$ (i.e., $\alpha_M \leq \alpha'_M$), $\Omega_s \leq \Omega_i$	
choice of the order n	choose	choose	$n = m + \delta$ such that $\alpha_m \geq \alpha'_m$, with $\delta = 0$ or 2 or 4	
NLP transfer function $F_{m+\delta}^{(w)}$ (s)	$K \prod_{i=1}^m (s^2 + \Omega_{2i}^2)$	$K \prod_{i=1}^m (s^2 + \Omega_{2i}^2)$	$K \prod_{i=1}^m (s^2 + \Omega_{pi}^2) \prod_{i=1}^{(m-\delta-2)/2} (s^2 + s\Omega_{pi}/Q_i + \Omega_{pi}^2)$	$u = 0(1)$ for n even (odd) $w = (n - u)/2$ $\mu_c = \delta/2 + 1$
number of poles n_i	n	n	$2n$	$2n$
number of finite zero pairs w_i	w	w	$2w$	$2w$
number of transmission zeros at origin ν_0	0	u	u	0
number of transmission zeros at infinity ν_∞	u	0	u	0
multiplicative factor k	$K(2\pi f_1)^n$	$(1 - p_M^2)^{(1-u)/2}$	$K[B(2\pi f_0)]^w$	$(1 - p_M^2)^{(1-u)/2}$

NORMALIZED LOW PASS (NLP)

FUNCTION

(continued)

Table I (continued)

Poles corresponding to a real pole Ω_r of NLP model (only for $\mu = 1$)	$f_r = f_1 \Omega_r$ real pole	$f_r = f_2 \Omega_r$ real pole	$V_r = B \Omega_r$ $V_r < 2: f_{pr} = f_0, q_r = 1/V_r$, complex pole-pair $V_r \geq 2: f_{r^+} = f_0 [V_r/2 + \sqrt{(V_r/2)^2 - 1}]$ $f_{r^-} = f_0^*/f_{r^+}$, two real poles	$V_r = B/\Omega_r$
Poles corresponding to a non-critical complex pole-pair Ω_{pi}, Q_i of NLP model. $i = 1, 2, \dots, (m-\mu-2)/2$	$f_{pi} = f_1 \Omega_{pi}, q_i = Q_i$	$f_{pi} = f_2 \Omega_{pi}, q_i = Q_i$	$V_{pi} = B \Omega_{pi}$ $H_{pi} = V_{pi}^2 (4 - 1/Q_i^2) [2 - V_{pi}^2/2 + \sqrt{(V_{pi}^2/2 - 2)^2 + V_{pi}^2 (4 - 1/Q_i^2)}]$ $f_{pi^+} = j_0 [\sqrt{H_{pi}/2} + \sqrt{H_{pi}/4 + 1}]$ $q_{i^+} = 2Q_i \sqrt{H_{pi}/4 + 1}/V_{pi}; f_{pi^-} = f_0^*/f_{pi^+}, q_{i^-} = q_{i^+}$	$V_{pi} = B/\Omega_{pi}$
Poles corresponding to a critical complex pole-pair Ω_{pc}, Q_c , with multiplicity μ_c , of NLP model	$f_{pc} = f_1 \Omega_{pc}, q_c = Q_c$	$f_{pc} = f_2 \Omega_{pc}, q_c = Q_c$	$V_{pc} = B \Omega_{pc}$ $H_{pc} = V_{pc}^2 (4 - 1/Q_c^2) [2 - V_{pc}^2/2 + \sqrt{(V_{pc}^2/2 - 2)^2 + V_{pc}^2 (4 - 1/Q_c^2)}]$ $f_{pc^+} = f_0 [\sqrt{H_{pc}/2} + \sqrt{H_{pc}/4 + 1}]$ $q_{c^+} = 2Q_c \sqrt{H_{pc}/4 + 1}/V_{pc}; f_{pc^-} = f_0^*/f_{pc^+}, q_{c^-} = q_{c^+}$	$V_{pc} = B/\Omega_{pc}$
Zeros corresponding to a finite imaginary conjugate zero-pair $\pm j \Omega_{zi}$	$f_{zi} = f_1 \Omega_{zi}$	$f_{zi} = f_2 \Omega_{zi}$	$V_{zi} = B \Omega_{zi}$ $f_{zi^+} = f_0 [V_{zi}/2 + \sqrt{(V_{zi}/2)^2 + 1}]; f_{zi^-} = f_0^*/f_{zi^+}$	$V_{zi} = B/\Omega_{zi}$
Transformed transfer function $\mathcal{G}_{m+\delta}^{(w)}(p)$	$k p^{w_0} \prod_{i=1}^{w_1} [p^2 + (2\pi f_{zi})^2]$ $(p + 2\pi f_{pc})^{\mu_c} [p^2 + 2\pi f_{pc}/q_c + (2\pi f_{pc})^2]^{\mu_c}$ $\prod_{i=1}^{(m-\mu-2)/2} [p^2 + 2\pi f_{pi}/q_i + (2\pi f_{pi})^2]$	$Z(p) = p^{w_0}$ $k Z(p) \prod_{i=1}^{w_1/2} \{ [p^2 + (2\pi f_{zi})^2] [p^2 + (2\pi f_{zi^-})^2] \}$ $\{ [p^2 + 2\pi f_{pi}/q_i + (2\pi f_{pi})^2]^{\mu_c} [p^2 + 2\pi f_{pc}/q_c + (2\pi f_{pc})^2]^{\mu_c} \}$ $\prod_{i=1}^{(m-\mu-2)/2} \{ [p^2 + 2\pi f_{pi}/q_i + (2\pi f_{pi})^2] [p^2 + 2\pi f_{pi^-}/q_i + (2\pi f_{pi^-})^2] \}$	$Z(p) = [p^2 + (2\pi f_0)^2]^{\mu}$	$Z(p) = [p^2 + (2\pi f_0)^2]^{\mu}$

TRANSFORMED