

# PROGETTO DI UN FILTRO RC-ATTIVO CON CELLE CONNESSE IN CASCATA

## Soluzioni

### 1 Equazioni di progetto per la cella NF

In totale si hanno cinque parametri liberi e tre equazioni da soddisfare. Assumendo  $C_2$  e  $C_3$  come variabili indipendenti si possono ottenere i valori degli altri componenti in funzione di  $\omega_p$ ,  $q_p$  e  $K$ . Dalle formule di analisi si ottiene

$$R_1 R_4 = \frac{1}{\omega_p^2 C_2 C_3}, \quad \frac{R_4}{R_1} = q_p^2 \left(1 + \frac{C_2}{C_3}\right)^2 \frac{C_3}{C_2} = q_p^2 \left(\frac{C_3}{C_2} + \frac{C_2}{C_3} + 2\right)$$

Ponendo

$$P = q_p^2 \left(\frac{C_3}{C_2} + \frac{C_2}{C_3} + 2\right)$$

si ottiene:

$$R_1 = \frac{1}{2\pi f_p \sqrt{PC_2 C_3}}, \quad R_4 = PR_1$$

Avendo calcolato  $R_1$ , è possibile ora calcolare  $R_{11}$  e  $R_{12}$ , ricordando che

$$\frac{R_{11} R_{12}}{R_{11} + R_{12}} = R_1, \quad \frac{R_{12}}{R_{11} + R_{12}} = \frac{K}{K_0}$$

Si osservi che  $K \leq K_0$  e quindi  $K_0$  rappresenta il massimo di  $|V_u/V_e|$  per assegnati valori di  $C_2$  e  $C_3$ . Dalle precedenti due equazioni si ottengono le ultime due equazioni di progetto:

$$R_{11} = \frac{K_0}{K} R_1, \quad R_{12} = \frac{K_0}{K_0 - K} R_1, \quad K \leq K_0$$

### 2 Approssimazione

Il filtro da progettare coincide con il filtro  $LC$  già progettato per trasformazione di frequenza. Si rimanda a quella esercitazione per il calcolo di  $\varepsilon$  e  $n$ . Ora, in più, si vuole un guadagno di 20dB in banda passante, con ondulazione (*ripple*) non superiore a 0.3dB. Il guadagno richiesto può essere ottenuto semplicemente variando la costante moltiplicativa. I valori dei poli e della costante moltiplicativa ( $1/C$ ) del filtro passa basso normalizzato (NLP) sono estratti dalla tabella C0325P. Si ottiene:

$$-\alpha_1 = 1.5704178025, \quad -\alpha_2 \pm j\beta_2 = 0.7582089012 \pm j1.3600217115, \quad C = 0.258198890$$

La funzione di trasmissione del filtro passa basso normalizzato assume la seguente espressione:

$$V_u/V_e = T(s) = \frac{1}{0.258198890} \frac{1}{(s + 1.570418)(s^2 + 1.570418s + 2.465825)}$$

Si osservi che, per  $s = 0$ , si ottiene  $T(0) = 1$ , come deve essere. Per ottenere un guadagno di 20dB deve risultare  $T(0) = 10$  e quindi basta moltiplicare la funzione per 10. La nuova costante moltiplicativa  $K_{LP}$  vale

$$K_{LP} = 10/C = 38.72983342$$

Il NLP con un guadagno di 20 dBha quindi espressione:

$$T_{LP}(s) = K_{LP} \frac{1}{(s + \alpha_1)(s^2 + b_1s + b_0)}$$

ove  $\alpha_1$ ,  $b_1$  e  $b_0$  hanno i valori precedentemente riportati. Si operi ora la trasformazione NLP  $\rightarrow$  BP:

$$s = Q_0 \left( \frac{p}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{p} \right), \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \sqrt{f_3 f_2}, \quad Q_0 = \frac{f_0}{f_3 - f_2}$$

ove  $f_3$  e  $f_2$  sono le frequenze di taglio superiore e inferiore della banda passante.

La funzione di trasmissione del filtro passa-banda assume la forma:

$$T_{BP}(p) = K_{LP} \left( \frac{\omega_0}{Q_0} \right)^3 \frac{p^3}{\left( p^2 + \frac{\omega_0}{Q_0/\alpha_1} p + \omega_0^2 \right) \left[ p^4 + b_1 \frac{\omega_0}{Q_0} p^3 + \left( 2\omega_0^2 + b_0 \frac{\omega_0^2}{Q_0^2} \right) p^2 + b_1 \frac{\omega_0^3}{Q_0} p + \omega_0^4 \right]}$$

Sebbene la scrittura della precedente funzione non sia strettamente necessaria ai fini del progetto, essa è tuttavia utile per comprendere la trasformazione effettuata. Ad ogni polo reale del NLP corrisponde una coppia di poli complessa coniugata nel BP, mentre ad ogni coppia di poli complessa coniugata nel NLP corrispondono due coppie di poli complessi coniugati nel BP. In totale la funzione BP è di grado doppio rispetto alla funzione NLP, in più compaiono anche tre zeri nell'origine. La nuova costante moltiplicativa vale

$$K_{BP} = K_{LP} \left( \frac{\omega_0}{Q_0} \right)^3 = K_{LP} [2\pi(f_3 - f_2)]^3 = 6.148444 \times 10^{11}$$

### 3 Trasformazione passa-basso - passa-banda: calcolo delle radici del passa-banda

Si indichi con  $s = \Sigma + j\Omega$  la pulsazione del filtro passa-basso normalizzato e con  $p = \sigma + j\omega$  la corrispondente pulsazione del passa-banda.

Come già detto in precedenza, la trasformazione passa-basso  $\rightarrow$  passa-banda è data da

$$s = Q_0 [p/\omega_0 + \omega_0/p]$$

ove

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \sqrt{\omega_2 \omega_3}, \quad Q_0 = \omega_0 / (\omega_3 - \omega_2) = f_0 / (f_3 - f_2)$$

essendo  $f_2$  e  $f_3$  rispettivamente le frequenze di taglio inferiore e superiore della banda passante.

Indicato con  $s_r = \Sigma_r + j\Omega_r$ , ( $\Sigma_r$  con segno e  $\Omega_r > 0$ ) una generica radice (polo o zero) del passa-basso, le corrispondenti radici della funzione passa-banda si ottengono risolvendo l'equazione:

$$p^2 - s_r \frac{\omega_0}{Q_0} p + \omega_0^2 = 0$$

Le radici sono date da:

$$p_{1,2} = \frac{\omega_3 - \omega_2}{2} \left[ \Sigma_r + j\Omega_r \pm \sqrt{-[\Omega_r^2 - \Sigma_r^2 + 4Q_0^2] + j2\Sigma_r\Omega_r} \right]$$

Calcolando la radice del numero complesso che appare nella formula precedente, badando di evitare la differenza tra quantità molto grandi e circa uguali, si ottiene :

$$p_1 = \frac{\omega_3 - \omega_2}{2} \left[ \Sigma_r + \frac{Y}{2V} + j(\Omega_r + V) \right]$$

$$p_2 = \frac{\omega_3 - \omega_2}{2} \left[ \Sigma_r - \frac{Y}{2V} + j(\Omega_r - V) \right]$$

ove

$$X = \left[ \Omega_r^2 - \Sigma_r^2 + 4Q_0^2 \right], \quad Y = 2\Sigma_r\Omega_r, \quad V = \left[ \frac{\sqrt{X^2 + Y^2} + X}{2} \right]^{1/2}$$

Se si considera la radice complessa coniugata  $\Sigma_r - j\Omega_r$ , si ottengono le altre due radici  $p_3$  e  $p_4$  che sono le complesse coniugate di quelle trovate.

Nel caso di radice reale ( $\Omega_r = 0$ ), le formule precedenti si semplificano e si possono ottenere direttamente frequenza  $\omega_r$  e Q della radice (come si può agevolmente verificare dall'espressione di  $T_{BP}$  scritta in precedenza):

$$\omega_r = \omega_0, \quad q_r = \frac{Q_0}{-\Sigma_r}$$

Nel caso in esame si ottiene:

1. Coppia complessa coniugata corrispondente al polo reale del NLP:

$$\omega_{pr} = \omega_0 = 2\pi \times 3193.743885 \text{ rad/s}, \quad q_{pr} = \frac{Q_0}{\alpha_1} = 5.084226$$

2. Coppie complesse coniugate corrispondenti alla coppia di poli complessi coniugati del NLP.

Frequenza e Q dei poli possono essere calcolati usando il seguente *file* MatLab:

```
format long g ;
format compact;
% uso parte reale e immaginaria delle radici del NLP
display('-----')
display('Uso parte reale e immaginaria delle radici')
display('-----')

f3 = 3400;
f2 = 3000;
f0 = sqrt(f3*f2)
Q0 = f0/(f3-f2)

%Poli complessi coniugati (NLP)
display('-----')
display('Coppia di poli complessi coniugati del NLP:')

Sr = -0.7852089012
Wr = 1.3600217115
X = Wr^2 - Sr^2 + 4*Q0^2;
Y = 2*Sr*Wr;
V = (((X^2 + Y^2)^0.5+ X)/2)^0.5;

Re_p = pi*(f3-f2)* (Sr+ Y/(2*V));
Im_p = pi*(f3-f2)* (Wr+V);
W1_p = sqrt(Re_p^2 + Im_p^2);
F1_p = W1_p/(2*pi)
Q1_p = -W1_p/(2* Re_p)
```

```

Re_m = pi*(f3-f2)* (Sr - Y/(2*V));
Im_m = pi*(f3-f2)* (Wr - V);
W1_m = sqrt(Re_m^2 + Im_m^2);
F1_m = W1_m/(2*pi)
Q1_m = -W1_m/(2* Re_m)
%=====

```

Le due coppie ottenute hanno lo stesso Q e due frequenze  $f_{p+}$  e  $f_{p-}$  diverse, ma tali che  $f_{p+}f_{p-} = f_0^2$ . I valori numerici sono:

$$q_{p+} = q_{p-} = q = 10.205353, \quad f_{p+} = 3477.665131 \text{ Hz}, \quad f_{p-} = f_0^2/f_{p+} = 2933.002349 \text{ Hz}$$

## 4 Accoppiamenti zeri-poli

L'accoppiamento zeri-poli può essere scelto in modo da massimizzare la dinamica del filtro complessivo, oppure secondo altri criteri legati ad altri aspetti pratici. In questo caso, essendo l'accoppiamento poco critico data la bassa selettività del filtro, si è preferito privilegiare la semplicità della messa a punto finale (*tuning*) delle singole celle biquadratiche. Di conseguenza si è scelto di attribuire uno zero nell'origine a ciascuna coppia di poli, in modo da ottenere tre funzioni biquadratiche di tipo passa-banda, la cui messa a punto risulta facilitata rispetto a quella delle altre funzioni biquadratiche.

## 5 Ordine di successione in cascata

Generalmente, per avere la massima dinamica, le celle devono seguirsi in ordine di Q dei poli crescenti. Seguendo questo criterio empirico, si usa come prima cella quella con il Q dei poli uguale a  $q_r$ . Le due celle successive hanno lo stesso Q e quindi il loro ordine è indifferente. La struttura prescelta è indicata sinteticamente qui di seguito:

$$\boxed{\omega_r, q_r} \quad \boxed{\omega_{p-}, q} \quad \boxed{\omega_{p+}, q}$$

## 6 Calcolo delle costanti moltiplicative

Introducendo le costanti moltiplicative, la funzione di trasmissione assume la seguente espressione:

$$\frac{V_u}{V_e} = K_1 \frac{p}{p^2 + \frac{\omega_r}{q_r}p + \omega_r^2} \times K_2 \frac{p}{p^2 + \frac{\omega_{p-}}{q}p + \omega_{p-}^2} \times K_3 \frac{p}{p^2 + \frac{\omega_{p+}}{q}p + \omega_{p+}^2}$$

Le tre costanti moltiplicative devono soddisfare all'unico vincolo

$$K_1 K_2 K_3 = K_{BP}$$

e pertanto possono essere scelte in una infinità di modi. Nel seguito si è scelto come criterio quello che porta alla massimizzazione della dinamica del filtro.

Considerando le tre celle connesse in cascata, si indichi con  $T_1$  la funzione di trasmissione *monica* (cioè con costante moltiplicativa unitaria) tra l'entrata e l'uscita della prima cella e con  $T_2$  la funzione di trasmissione *monica* tra l'entrata e l'uscita della seconda cella. In formule:

$$T_1(p) = \frac{p}{p^2 + \frac{\omega_r}{q_r}p + \omega_r^2}, \quad T_2(p) = \frac{p}{p^2 + \frac{\omega_r}{q_r}p + \omega_r^2} \times \frac{p}{p^2 + \frac{\omega_{p-}}{q}p + \omega_{p-}^2}$$

Per massimizzare la dinamica del filtro, le costanti moltiplicative vengono calcolate imponendo che le singole funzioni di trasmissione parziali (nel nostro caso  $T_1$ ,  $T_2$  e la funzione finale  $V_u/V_e$ ) abbiano

tutte quante il massimo del loro modulo di uguale ampiezza e uguale al valore richiesto dalle specifiche di progetto (in questo caso 10).

Di conseguenza, la costante  $K_1$  viene calcolata imponendo che il massimo del modulo della funzione di trasmissione  $K_1 T_1$  raggiunga il valore massimo previsto per la funzione globale, ovvero 10. Si ottiene:

$$K_1 |T_1|_{Max} = K_1 \frac{q_r}{\omega_r} = 10$$

Da cui

$$K_1 = 10 \frac{\omega_r}{q_r} = 39468.9$$

Per la determinazione del massimo del modulo della funzione  $T_2$ , si è ricorsi al seguente file MatLab. Il valore massimo  $|T_2|_{Max}$  può essere letto dalla fig.1

```

Progetto di un filtro RC attivo con celle in cascata
% Calcolo del massimo di |T2|
% Prima cella
wr = 2*pi*3193.743885;
qr = 5.084226;
T1_Max = qr/wr
% Seconda cella
wpm = 2*pi*2933.002349;
qp = 10.205353;
%
%
f = linspace(2000, 3400, 1401);
w = 2*pi * f;
p = 0 + w*j;
%
% Evaluate partial transfer function T2 on the j-omega axis:
nT2 = p.*p;
dT2a = (p.*p + p.*(wr./qr) + (wr).*(wr));
dT2 = dT2a.*(p.*p + p.*(wpm./qp) + (wpm).*(wpm));
T2 = nT2./dT2;
%
% Evaluate amplification:
ampl = abs(T2);
%
% Plot attenuation:
plot(f, ampl);
grid;

```

Si ottiene

$$|T_2|_{Max} = 1.093 \times 10^{-7}$$

Per avere massimi di uguale ampiezza deve essere

$$K_1 K_2 |T_2|_{Max} = K_1 |T_1|_{Max}$$

da cui segue

$$K_2 = \frac{|T_1|_{Max}}{|T_2|_{Max}} = 2318.10$$

Infine, dovendo essere  $K_1 K_2 K_3 = K_{BP}$ , si ottiene

$$K_3 = \frac{K_{BP}}{K_1 K_2} = 6720.13$$

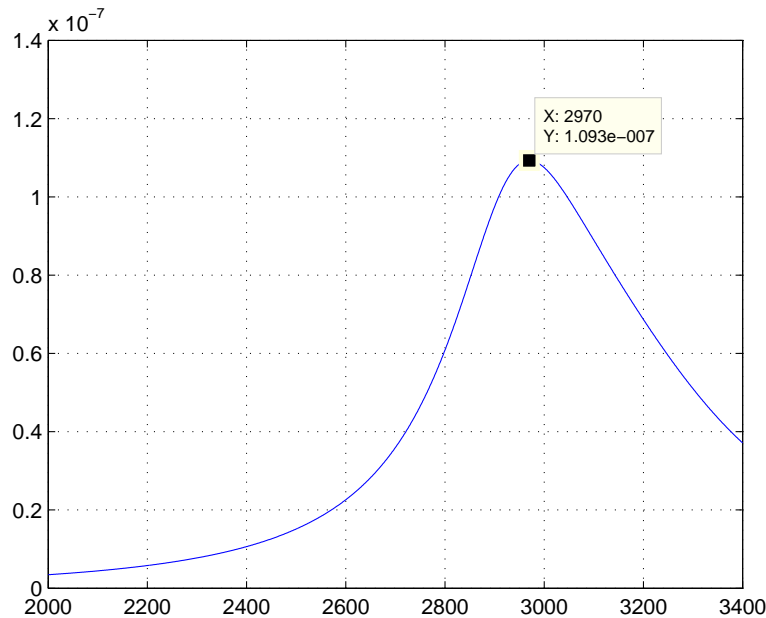


Figura 1. Andamento del modulo di  $T_2$

## 7 Progetto delle celle

Dopo aver calcolato costanti moltiplicative, frequenza e Q dei poli, le celle possono essere progettate usando le formule ricavate all'inizio dell'esercitazione. Per comodità si riporta la funzione di trasmissione complessiva, spezzata nel prodotto di tre fattori biquadratici, scritti nella forma "canonica", utile per il progetto.

$$\frac{V_u}{V_e} = 10 \frac{\frac{\omega_r}{q_r} p}{p^2 + \frac{\omega_r}{q_r} p + \omega_r^2} \times 1.284 \frac{\frac{\omega_{p-}}{q} p}{p^2 + \frac{\omega_{p-}}{q} p + \omega_{p-}^2} \times 3.139 \frac{\frac{\omega_{p+}}{q} p}{p^2 + \frac{\omega_{p+}}{q} p + \omega_{p+}^2}$$

La scelta dei valori di  $C_2$  e  $C_3$  viene fatta in modo da minimizzare  $\Gamma^{q_p}$ , quindi avendo a disposizione condensatori di valore 1 nF e 10 nF, si pone

$$C_2 = 10 \text{ nF}, \quad C_3 = 1 \text{ nF}$$

I valori dei componenti sono riportati nella seguente tabella.

Componenti	Cella 1	Cella 2	Cella 3
R11	2.534 k $\Omega$	43.13 k $\Omega$	14.88 k $\Omega$
R12	1.374 k $\Omega$	489.0 $\Omega$	419.2 $\Omega$
R4	278.7 k $\Omega$	609.2 k $\Omega$	513.7 k $\Omega$
C2	10 nF	10 nF	10 nF
C3	1 nF	1 nF	1 nF

Tabella 1. Valori dei componenti per le tre celle del filtro passa-banda

## 8 Simulazione con PSpice

Il listato di istruzioni per *PSpice* che permette l'analisi del filtro appena progettato è indicato qui di seguito. Gli amplificatori sono considerati ideali.

## Analisi di un filtro RC-attivo passa banda alla Butterworth

```
VI 1 0 AC 1
X1 1 2 BP1
X2 2 3 BP2
X3 3 4 BP3
.SUBCKT BP1 1 2
  R11 1 3 2.534K
  R12 3 0 1.374K
  R4 4 2 278.7K
  C2 3 2 10NF
  C3 3 4 1NF
  XOA 0 4 2 0A
.ENDS BP1
.SUBCKT BP2 1 2
  R11 1 3 43.13K
  R12 3 0 489
  R4 4 2 609.2K
  C2 3 2 10NF
  C3 3 4 1NF
  XOA 0 4 2 0A
.ENDS BP2
.SUBCKT BP3 1 2
  R11 1 3 14.88K
  R12 3 0 419.2
  R4 4 2 513.7K
  C2 3 2 10NF
  C3 3 4 1NF
  XOA 0 4 2 0A
.ENDS BP3
.SUBCKT OA 1 2 3
*      | | |
*      | | output
*      | inverting input
*      non inverting input
  E1 3 0 1 2 1E8
.ENDS OA
.AC LIN 61 2000 5000
.probe
.end
```

Le curve di risposta parziali (in dB) sono riportate in fig.2. In verde è indicato l'andamento di  $|T_1|$  e in rosso quello di  $|T_2|$ . La curva blu è invece la curva di risposta complessiva. Si noti che, come previsto, tutte le curve hanno lo stesso valore massimo. Si osservi anche che le specifiche di attenuazione nelle bande attenuate sono rispettate, con un buon margine a 2000 Hz, limite della banda attenuata inferiore, e con un margine più esiguo a 4400 Hz, limite della banda attenuata superiore. Questa dissimmetria di comportamento tra le due bande attenuate è intimamente legata alla trasformazione di frequenza usata, che produce curve di risposta *geometricamente* simmetriche rispetto alla frequenza  $f_0$

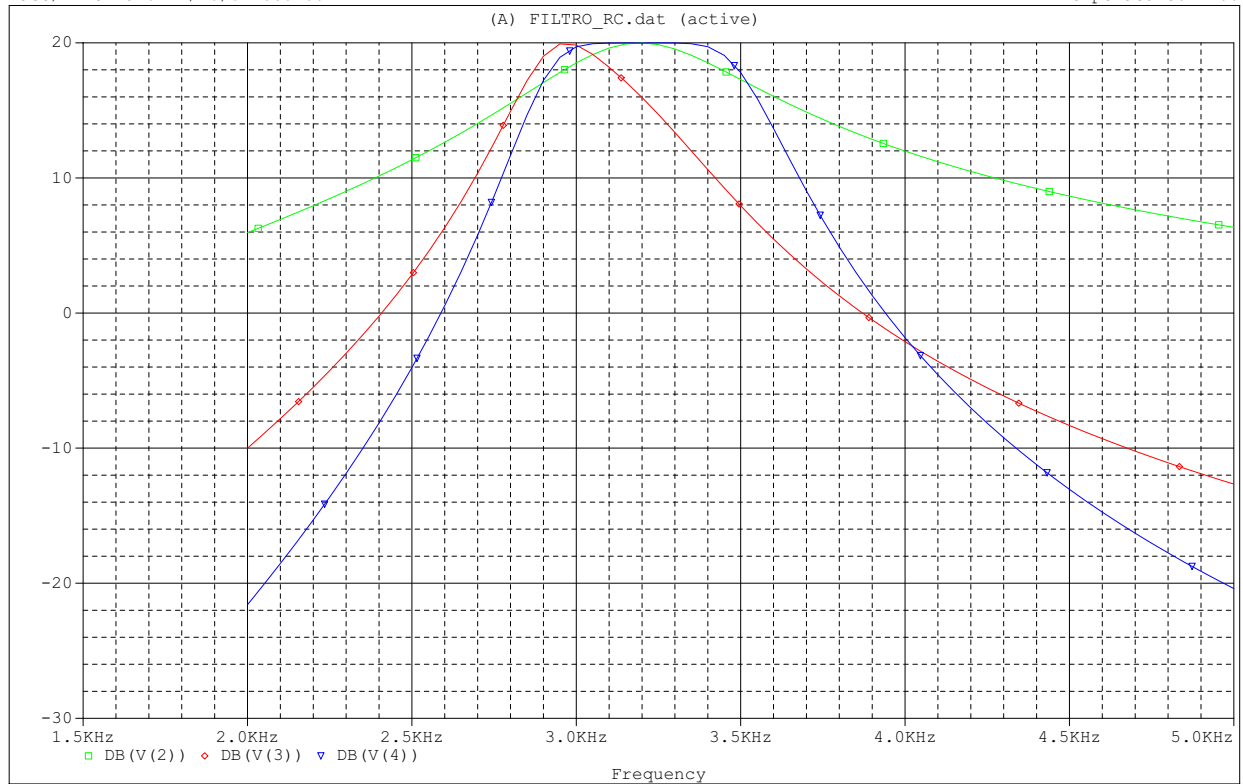


Figura 2. Curve di risposta del filtro passa-banda