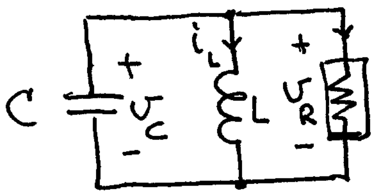
Soluzione esercizio # 1



$i_R = g(v_R) = -v_R + \frac{1}{3} v_R^3$

Assumo v_C e i_L come variabili di stato.

Devo calcolare i_C e v_L.

Si ha subito:

$$v_L = v_C$$

ovvero

$$L \frac{di_L}{dt} = v_C$$

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L} v_C$$

Infine

$$i_C = -i_L - i_R = -i_L - g(v_C)$$

$$C \frac{dv_C}{dt} = -i_L + v - \frac{1}{3} v_C^3$$

In conclusione:

$$\begin{cases} \dfrac{dv_C}{dt} = \dfrac{1}{C}\left[v_C - \dfrac{1}{3} v_C^3 - i_L \right] \\[2ex] \dfrac{di_L}{dt} = \dfrac{1}{L} v_C \end{cases}$$

Soluzione esercizio # 2

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$$

• Punti di equilibrio:

$$\begin{cases} -x_1 + x_1 x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(x_2 - 1) = 0 \\ x_1 = -x_2 \end{cases} \qquad x_2(x_2-1) = 0$$

$x_2 = 0,\ x_2 = 1 \longrightarrow x_1 = 0,\ x_1 = -1$

Si hanno due punti di equilibrio

$$Q_1 = (0,0) \qquad Q_2 = (-1, 1)$$

• Calcolo lo Jacobiano:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} -1 + x_2 & x_1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

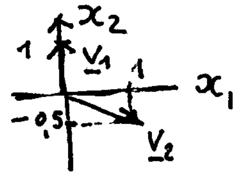
In Q_1 si ha $J_{Q_1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ho due autovalori $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ Si tratta di un punto di sella.

Calcolo gli autovettori corrispondenti

$\lambda_1 = 1 \quad \underline{V}_1 = \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} \quad \left(\underline{J}_{Q_1} - \lambda_1 \underline{I}\right) \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = 0$

$\begin{bmatrix} -1-1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1' \\ v_2' \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} -2v_1' = 0 \\ v_1' = 0 \end{matrix}$ posso assumere $v_2' = 1$ arbitrario.

Quindi $\underline{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$



$\lambda_2 = -1$

$\begin{bmatrix} -1+1 & 0 \\ 1 & 1+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1'' \\ v_2'' \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{matrix} v_1'' = 1 \text{ (arbitrario)} \\ v_1'' + 2v_2'' = 0 \qquad v_2'' = -1/2 \end{matrix}$

Si noti anche che se $x_1 = 0$ risulta $\dot{x}_1 = 0$; quindi l'asse x_2 è una traiettoria (varietà instabile del punto di sella). Le traiettorie non la possono attraversare.

Considero ora Q_2:

$$J_{Q_2} = \begin{bmatrix} -1+1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

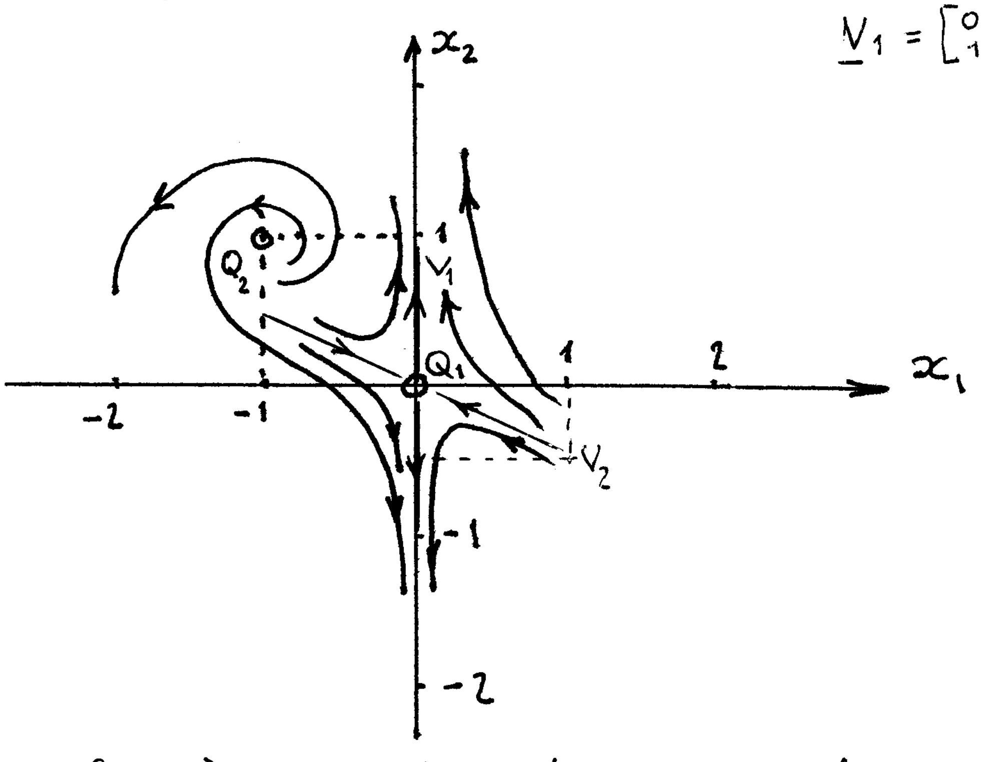
Autovalori: $\det \begin{bmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0$; $\lambda(\lambda-1)+1=0$

$\lambda^2 - \lambda + 1 = 0$ $\qquad \lambda = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \dfrac{1}{2} \pm j\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Ho parte reale positiva, quindi Q_2 è un fuoco instabile.

Posso ora fare un diagramma di fase qualitativo:

$\underline{V}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{V}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/2 \end{bmatrix}$



Per stabilire il verso di rotazione intorno al fuoco instabile basta calcolare il campo vettoriale in un paio di punti vicini a Q_2

$-1,\ 1{,}5 \ \longrightarrow \quad \dot{x}_1 = 1 - 1{,}5 = -0{,}5 \qquad \dot{x}_2 = 0{,}5 \qquad \nwarrow$

$-0{,}8,\ 1 \ \longrightarrow \quad \dot{x}_1 = 0 \qquad \dot{x}_2 = 0{,}2 \qquad \uparrow$

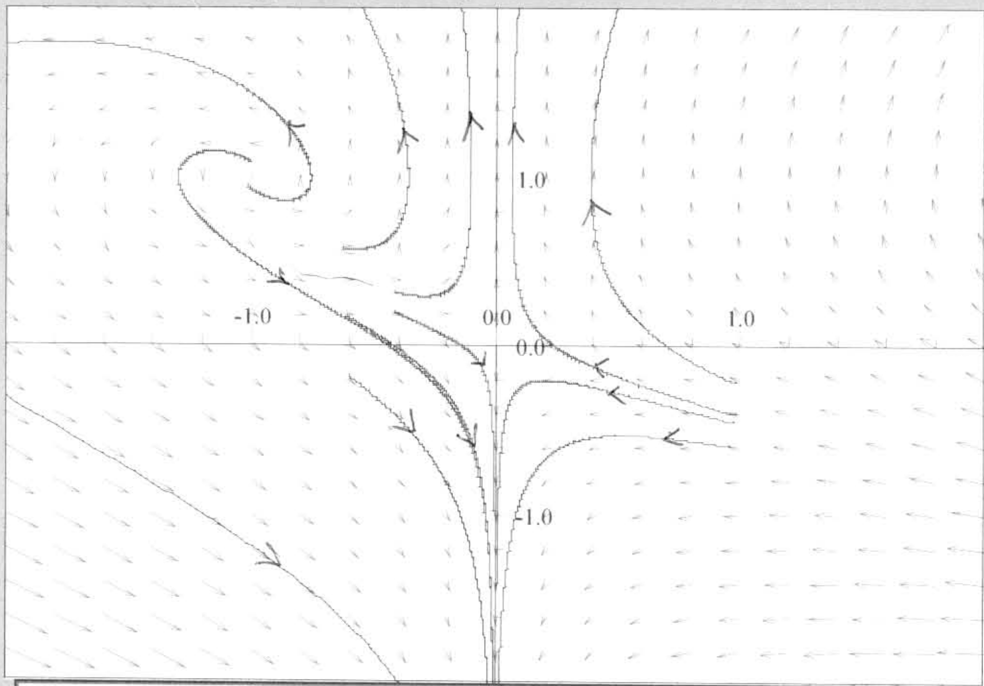
Quindi il senso di rotazione è antiorario

3/3

x1=2 frnl_080130 - Phase portrait of 2nd-order system x1=2

x2=2 x2=2

x2



t

x1

x2

x2=-2 x2=-2

x1=-2 x1 x1=2

eqn #0: Initialization a = -1; b = 1; c = 1; d = 1

eqn #1: dx1/dt = a*x1 + b*x1*x2

eqn #2: dx2/dt = c*x1 + d*x2

Min. t 0.0 Max. t 20.0

Min. x1 Max. x1

Min. x2 Max. x2

Num. of segs: t 100 x1 20 x2 20 Submit All

Show: Slopes Solutions Lines Points Ticks Axes Functions Init. Conds RK4 Step: 0.01

Add init. cond.: x1 0.0 x2 0.0 Submit Show Table Clear All

Last error: Show All Errors Print Frame