

### A.2.1 Diagrammi logaritmici di modulo e fase

Si desidera rappresentare in qualche modo la funzione

$$H(j\omega) = \mathcal{M}(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

o qualche cosa ad essa correlata.

- Nei diagrammi di Nyquist si considera la pulsazione  $\omega$  come un parametro e, dandole una sequenza di valori, si riporta la sequenza dei valori complessi  $H(j\omega_i) = \mathcal{M}_i \exp(j\varphi_i)$  nel piano complesso  $H$ ; le informazioni che si ottengono da questa rappresentazione grafica sono utili in diversi rami dell'elettronica, come si è visto per esempio nel capitolo 11, ma qui non se ne farà più cenno.
- I diagrammi di Bode sono la coppia di diagrammi "cartesiani"

$$A(\omega) = 20 \log \mathcal{M}(\omega) \quad (\text{A.1a})$$

$$B(\omega) = \frac{180}{\pi} \varphi(\omega) \quad (\text{A.1b})$$

proporzionali al modulo espresso (impropriamente) in decibel ed alla fase; l'aggettivo cartesiano è riportato fra virgolette per ricordare che gli assi di entrambi i diagrammi sono ortogonali, ma l'asse delle ascisse (di  $\omega$ ) non è tarato in modo lineare, ma è tarato proporzionalmente al logaritmo di  $\omega$ ; si tratta cioè di *diagrammi semilogaritmici*, perché un asse è logaritmico e l'altro è lineare.

- L'asse logaritmico è rappresentato nella figura A.1, dove si vede chiaramente che lungo l'asse è riportato linearmente il valore del logaritmo della variabile  $x$ , ma la scala è graduata con i valori stessi della variabile  $x$ , cosicché essi non risultano uniformemente spazati. Una unità di scala si chiama *decade*, perché i suoi estremi, tarati con valori che stanno fra di loro in rapporto di 10, hanno ascisse che differiscono di  $\log 10$ , cioè, appunto, di una unità di scala. Spesso, specialmente nella letteratura tecnica anglosassone, invece di far riferimento alla decade, si fa riferimento all'*ottava*, termine tratto dal linguaggio musicale, dove indica l'intervallo fra due note le cui frequenze stanno fra loro in rapporto di due; è perciò  $1 \text{ ottava} = \log 2 = 0,3 \text{ decadi}$ .

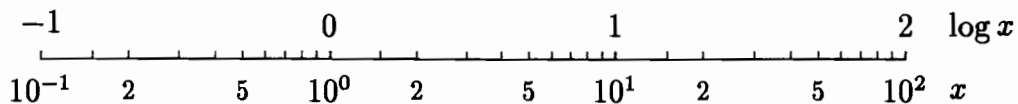


Figura A.1. Scala logaritmica

Per spiegare come si costruiscono i diagrammi (A.1) praticamente senza aver bisogno di fare calcoli, si immagini di disporre della funzione  $H(p)$  scritta in questa forma

$$H(p) = K \left\{ \prod (\varepsilon_i p + h_i)^{n_i} \right\} \left\{ \prod [p^2 + (2\omega_{0k} \sin \vartheta_k) p + \omega_{0k}^2]^{n_k} \right\} \quad (\text{A.2})$$

dove i fattori contenenti poli e zeri, reali o complessi, si distinguono dal segno dell'esponente, il cui valore assoluto indica la loro molteplicità.

Ovviamente se la funzione  $H(p)$  fosse rappresentata come rapporto di due polinomi, gli unici calcoli che bisognerebbe fare consisterebbero appunto nella scomposizione di tali polinomi in fattori; tale scomposizione non è in generale un'operazione banale, ma è

agevolata dall'esistenza di algoritmi numerici, particolarmente efficaci in tutti i casi pratici che si presentano in elettronica, come per esempio l'algoritmo di Bairstow-Newton. In elettronica, però, succede piuttosto spesso che zeri e poli possano essere determinati direttamente dal circuito, senza avere la necessità di ricorrere ad algoritmi tali da richiedere l'uso del calcolatore; se questo fosse il caso, tanto varrebbe usare il calcolatore per fargli eseguire anche il disegno dei diagrammi richiesti.

Il parametro  $\varepsilon_i$  è positivo se la radice reale di modulo  $h_i$  è nel semipiano di sinistra, mentre è negativo se essa è nel semipiano di destra<sup>1</sup>; l'angolo  $\vartheta_k$  è positivo se la coppia di radici complesse di modulo  $\omega_{0k}$  giacciono nel semipiano di sinistra, e viceversa è negativo se esse giacciono nel semipiano di destra;  $\vartheta_k$  è nullo se le radici sono puramente immaginarie; in ogni caso  $|\vartheta_k|$  non supera  $\pi/2$ .

L'equazione (A.2) può essere riscritta più convenientemente nella forma

$$H(p) = K' \left\{ \prod \left( \frac{\varepsilon_i p}{h_i} + 1 \right)^{n_i} \right\} \left\{ \prod \left[ \left( \frac{p}{\omega_{0k}} \right)^2 + 2 \left( \frac{p}{\omega_{0k}} \right) \sin \vartheta_k + 1 \right]^{n_k} \right\} \quad (\text{A.3a})$$

$$K' = K \left\{ \prod h_i^{n_i} \right\} \left\{ \prod \omega_{0k}^{2n_k} \right\} \quad (\text{A.3b})$$

nella quale si può porre  $p = j\omega$ , prendere il logaritmo e separare la parte reale da quella immaginaria

$$A(\omega) = 20 \log |K'| + \sum n_i a_{ri}(\omega) + \sum n_k a_{ck}(\omega) \quad (\text{A.4a})$$

$$B(\omega) = \frac{180}{\pi} \arg K' + \sum n_i b_{ri}(\omega) + \sum n_k b_{ck}(\omega) \quad (\text{A.4b})$$

dove

$$a_{ri}(\omega) = 10 \log \left[ \left( \frac{\omega}{h_i} \right)^2 + 1 \right] \quad (\text{A.5a})$$

$$a_{ck}(\omega) = 10 \log \left[ \left( \frac{\omega}{\omega_{0k}} \right)^4 + (4 \sin^2 \vartheta_k - 2) \left( \frac{\omega}{\omega_{0k}} \right)^2 + 1 \right] \quad (\text{A.5b})$$

$$b_{ri}(\omega) = \frac{180}{\pi} \left( \arctan \frac{\varepsilon_i \omega}{h_i} \right) \quad (\text{A.5c})$$

$$b_{ck}(\omega) = \frac{180}{\pi} \arctan \frac{2(\omega/\omega_{0k}) \sin \vartheta_k}{1 - (\omega/\omega_{0k})^2} \quad (\text{A.5d})$$

L'utilità di avere espresso le equazioni (A.5) in funzione di  $\omega/h_i$  oppure di  $\omega/\omega_{0k}$ , e di riportare il tutto lungo una scala in cui le ascisse sono logaritmiche nasce dalla proprietà stessa dei logaritmi per la quale

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$$

<sup>1</sup> Per la radice nulla conviene assumere  $h_0 = 0$  e  $\varepsilon_0 = 1$ , ma questo caso particolare verrà trattato separatamente.

- In altre parole i quattro tipi di diagrammi indicati dalle equazioni (A.5) sono quattro *tipi universali*, perché non cambiano forma al variare di  $h_i$  o di  $\omega_{0k}$ , ma subiscono solamente una traslazione lungo l'asse delle ascisse, corrispondente rispettivamente al logaritmo di  $h_i$  e al logaritmo di  $\omega_{0k}$ ; data la taratura della scala, non è necessario calcolare detti logaritmi, ma basta leggere i valori di  $h_i$  o di  $\omega_{0k}$  direttamente sulla graduazione dell'asse delle ascisse.

### A.2.2 Diagrammi associati alle radici reali e loro combinazioni

Quando si ha una radice reale, polo o zero che sia, in un punto qualsiasi dell'asse reale, esclusa l'origine, l'equazione (A.5a) (dove si pone  $h_i = h$  senza pericolo di confusioni) può essere riportata in diagramma (universale) come nella figura A.2.

- La curva del modulo presenta due asintoti, uno orizzontale e l'altro obliquo inclinato di 20 decibel alla decade, oppure, come si legge spesso nella letteratura anglosassone, di 6 decibel all'ottava. I due asintoti si incrociano nel *punto centrale*  $\omega/h = 1$ , dove l'ordinata del diagramma vale "esattamente" 3 dB (in realtà vale  $10 \log 2 = 3,0103 \dots$  dB). A causa di ciò, il punto centrale viene spesso chiamato frequenza a 3 dB, oppure *frequenza di taglio*, o con altre simili espressioni.

Per evitare di usare espressioni del tipo: "ho una radice reale contenuta in un fattore di primo grado della funzione di rete, il modulo del quale presenta un punto centrale collocato in  $\omega = h$ " (effettivamente è un'espressione un po' complicata e può essere semplificata entro certi limiti) si sentono usare espressioni del tipo "ho un polo (oppure uno zero) in  $h$ "; purché si sappia di che cosa si sta parlando, la frase più breve, benché gergale, può essere accettata. L'importante è non associare tale frase a un fattore del tipo  $(\omega - h)$  che effettivamente ha una radice in  $h$ ! Detto diversamente, l'importante consiste nel non confondere l'ascissa (logaritmica) del punto centrale collocato lungo l'asse reale  $\omega$  con la posizione della radice corrispondente al fattore in esame collocata nel piano complesso. Detto ancora diversamente, l'importante consiste nel non confondere l'ascissa reale  $\omega = h$  con la radice complessa  $p = -h$ .

- Quando non occorre una grande precisione nel disegno, il diagramma logaritmico di  $a_{r_i}(\omega)$  può essere approssimato dalla spezzata formata dai due asintoti; questo tipo di approssimazione è frequentissimo in elettronica; anzi, nelle applicazioni elettroniche dove sia sufficiente avere solamente un'idea qualitativa dell'andamento del modulo di una data funzione di rete, è esattamente quello che si fa e costituisce il grande vantaggio dei diagrammi di Bode.

Quando  $h_i = 0$ , l'equazione (A.5a) non è applicabile, ma si può ragionare come segue: il fattore  $p$  può essere pensato come  $h(p/h)$  e il primo fattore  $h$  può essere tranquillamente conglobato insieme a tutte le altre costanti nell'espressione di  $K'$ , equazione (A.3b). Per il resto  $h$  è totalmente arbitrario, ma una volta che se ne sia stato scelto il valore e questo sia stato inserito in  $K'$ , quella è la scelta definitiva di  $h$ . Ciò fatto, il diagramma di  $20 \log(\omega/h)$  non è altro se non una retta inclinata di 20 dB/decade che interseca le ascisse (logaritmiche) in  $\omega = h$ .

- Il diagramma di fase  $b_{r_i}(\omega)$  è riportato nella figura A.3; quando si riferisce ad una radice nell'origine esso degenera in una retta orizzontale all'altezza di  $90^\circ$ .

Esso presenta due asintoti orizzontali, uno ad altezza nulla, e l'altro all'altezza di  $90^\circ$ , ed un flesso nel punto centrale, dove vale  $45^\circ$ ; si può eseguire una approssimazione mediante spezzate della curva di fase, come mostrato nella figura, adottando una spezzata formata dagli asintoti e da una linea diagonale che passa per il punto centrale ed ha

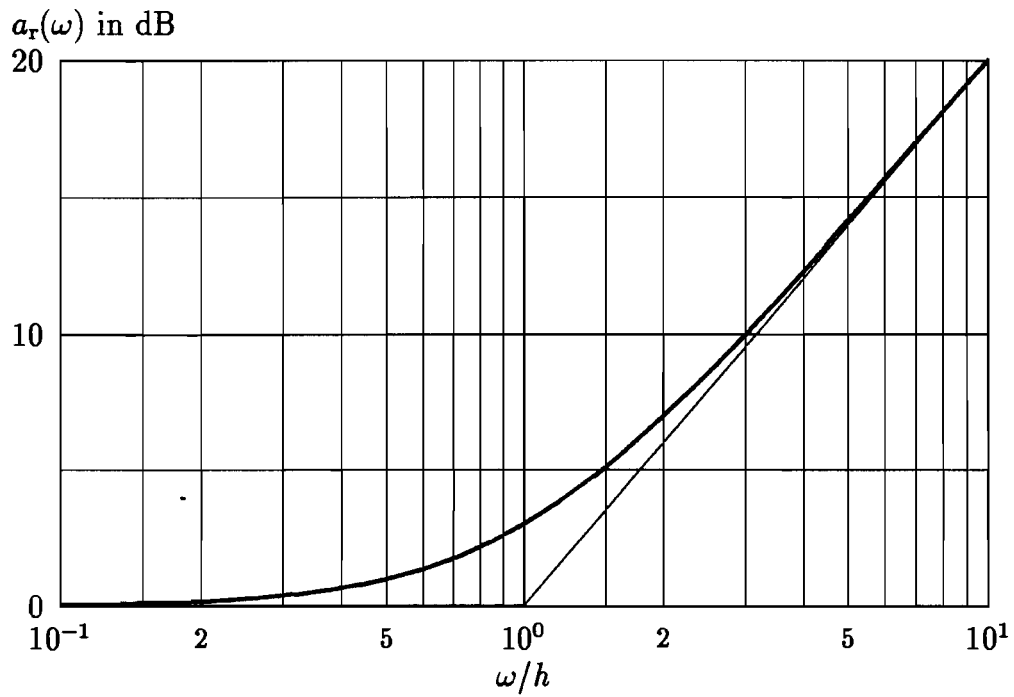


Figura A.2. Diagramma di Bode del modulo di un fattore associato ad una radice reale

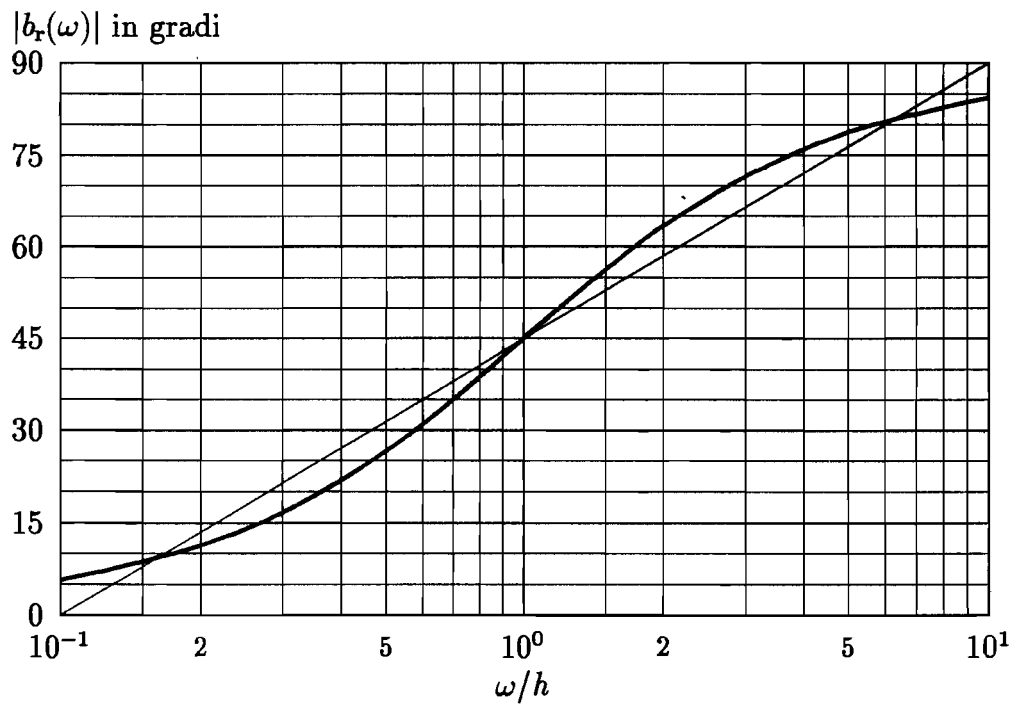


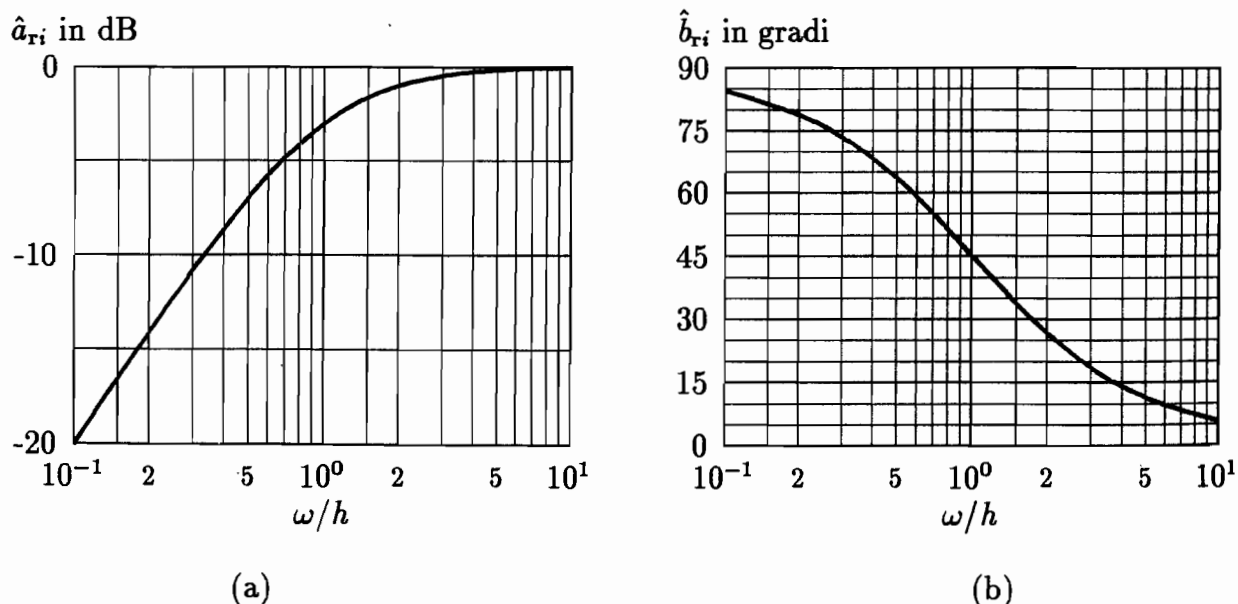
Figura A.3. Diagramma di Bode della fase di un fattore associato ad una radice reale

una pendenza di  $45^\circ/\text{decade}$ ; l'errore massimo che si compie è di quasi  $6^\circ$ , non molto grande, ma la possibilità di usare l'approssimazione a spezzate esiste solo se i fattori che compongono  $H(p)$  sono sufficientemente distanti, probabilmente più di una decade, certamente almeno due decadi. Adottare l'approssimazione a spezzate per il diagramma di fase di solito porta ad errori grossolani, per cui questo tipo di approssimazione non è praticamente mai usato nelle applicazioni dell'elettronica.

La forma di  $a_{ri}(\omega)$  e di  $b_{ri}(\omega)$ , a parte una rotazione e/o una simmetria, è comune anche a combinazioni particolari di zeri e poli. Infatti la combinazione dei fattori  $p$  e  $p/h + 1$  nella frazione

$$\frac{p/h}{p/h + 1}$$

o nella sua reciproca, dà luogo ancora a diagrammi  $\hat{a}_{ri}$  e  $\hat{b}_{ri}$  della stessa forma di  $a_{ri}$  e  $b_{ri}$ , solo che risultano ruotati di mezzo giro rispetto ad un asse perpendicolare al piano del disegno e passante per il punto centrale, figura A.4.



**Figura A.4.** Modulo (a) e fase (b) della particolare combinazione di fattori che contengono uno zero nell'origine ed un polo reale negativo

### A.2.3 Diagrammi associati alle radici complesse

- I diagrammi di modulo  $a_{ck}(\omega)$  e di fase  $b_{ck}(\omega)$  associati a fattori contenenti radici complesse (in realtà famiglie di diagrammi dipendenti dal parametro  $\vartheta_k$ ) possono essere rappresentati in scala semilogaritmica come nelle figure A.5 e A.6.

Nel diagramma del modulo  $a_{ck}(\omega)$ , figura A.5, si notano due asintoti, uno orizzontale ed uno inclinato di 40 decibel alla decade, che si incrociano nel punto centrale  $\omega = \omega_0$ , indipendentemente dal valore dell'angolo  $\vartheta_k$ .

Quando  $|\vartheta_k|$  è maggiore di  $45^\circ$ , i diagrammi sono monotoni, mentre se  $|\vartheta_k|$  è minore di  $45^\circ$ , le curve presentano un minimo, che diventa infinitamente profondo, quando le radici complesse sono puramente immaginarie, cioè quando  $\vartheta_k = 0^\circ$ .