Le leggi di Kirchhoff in forma matriciale

Mario Biey

Dipartimento di Elettronica
Politecnico di Torino
8 ottobre 2007

1 Forma matriciale delle leggi di Kirchhoff

Nel seguito si ricaverà la forma matriciale delle leggi di Kirchhoff. Poiché tali leggi dipendono esclusivamente dalla topologia del circuito, si introdurrà brevemente l'idea di *grafo orientato* associato ad una rete elettrica.

1.1 Grafo orientato

Un circuito elettrico è completamente descritto dalla sua *topologia* e dalla conoscenza degli *elementi* che lo costituiscono. Tuttavia, alcune proprietà del circuito, come ad esempio le leggi di Kirchhoff delle tensioni e delle correnti, dipendono esclusivamente dalla sua topologia e sono indipendenti dai componenti. Può quindi essere utile sostituire allo schema del circuito una rappresentazione che metta in risalto soltanto il modo in cui i componenti sono collegati, senza fare riferimento ai componenti stessi. Ciò può essere fatto nel modo seguente:

1. si sostituisce ogni elemento a due morsetti con un arco di linea, detto ***ramo***;

2. si assegnano numeri diversi ai nodi della rete e gli stessi numeri ai corrispondenti punti di connessione dei rami;

3. su ogni ramo viene fissato un verso, coincidente con il verso positivo assunto per la corrente. Sul ramo non è segnato il verso della tensione, che viene implicitamente fissato in accordo con la convenzione indicata in figura 1 (detta anche *convenzione degli utilizzatori*).

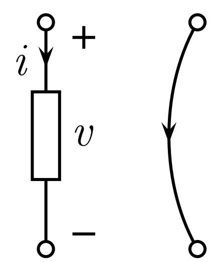

Figura 1. Bipolo e ramo orientato corrispondente

Ciò che si ottiene viene detto ***grafo orientato*** associato al circuito considerato.

In figura 2 sono rappresentati due circuiti fatti con componenti diversi, ma con la stessa topologia. Nella stessa figura è rappresentato il grafo ad essi associato. Per maggiori dettagli ed un'estensione al caso di circuiti contenenti componenti con più morsetti si rimanda a [1].

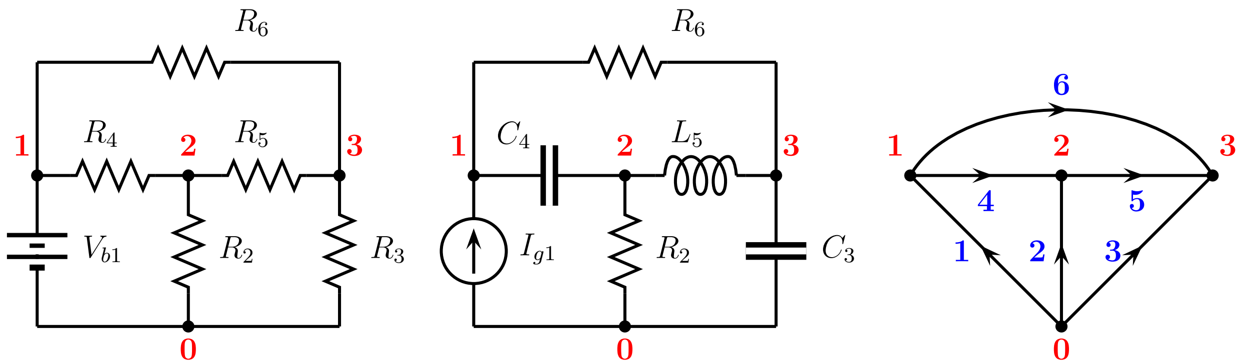

Figura 2. Circuiti con stessa topologia ma diversi componenti hanno lo stesso grafo. In blu è indicata la numerazione dei rami, in rosso quella dei nodi.

1.2 Le leggi di Kirchhoff in forma matriciale

1.2.1 Leggi di Kirchhoff delle correnti

Si consideri un circuito il cui grafo è indicato in figura 3 e si scrivano le leggi di Kirchhoff delle correnti (KCL) ai quattro nodi indicati, assumendo come verso positivo quello *uscente* dal nodo.

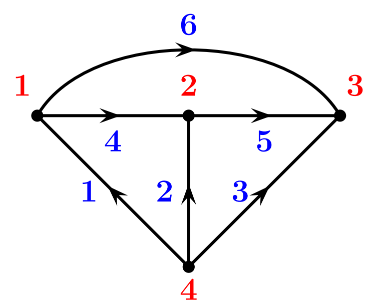

Figura 3. Il grafo orientato utilizzato nell'esempio

Si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} -i_1 + i_4 + i_6 & = & 0 \\ -i_2 - i_4 + i_5 & = & 0 \\ -i_3 - i_5 - i_6 & = & 0 \\ i_1 + i_2 + i_3 & = & 0 \end{array} \right. \tag{1}$$

Il sistema può essere riscritto nella forma seguente:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Osservando il sistema 2 si può notare che ogni colonna della matrice dei coefficienti contiene esattamente un $+1$ e un -1 e quindi le equazioni scritte risultano linearmente dipendenti (sommando tutte le righe si ottiene una riga di tutti zero).

Questo risultato è del tutto generale: *se in un circuito si scrivono le KCL a tutti i nodi, allora le equazioni ottenute risultano linearmente dipendenti.*

Si può provare che (cfr. [1]): *se in un circuito con n nodi si scrivono le KCL a tutti i nodi tranne uno, allora le equazioni ottenute risultano linearmente indipendenti*

Il nodo escluso viene solitamente detto ***nodo di riferimento*** e ad esso è assegnato il numero 0.

Nell'esempio in esame, se si assume il nodo 4 come nodo di riferimento, si ottiene il seguente sistema di equazioni (linearmente indipendenti):

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3}$$

e, in forma compatta,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{i} = \mathbf{0} \tag{4}$$

Nell'equazione 4 la matrice $\boldsymbol{A}$ è detta ***matrice di incidenza*** (ridotta, in quanto associata a $n-1$ nodi). Il suo numero di colonne è uguale al numero di rami del grafo e il suo numero di righe è uguale al numero di nodi meno 1. I suoi elementi a_{ij} valgono:

- ◇ $+1$ se il ramo j incide nel nodo i con il verso della corrente uscente dal nodo;
- ◇ -1 se il ramo j incide nel nodo i con il verso della corrente entrante nel nodo;
- ◇ 0 se il ramo j non incide nel nodo i

1.2.2 Leggi di Kirchhoff delle tensioni

Si consideri ora lo stesso grafo di figura 3 e si scrivano le leggi di Kirchhoff delle tensioni (KVL) usando per esse la forma indicata in figura 4.

Indicando con v_k la tensione di un generico ramo $\mathbf{k}$ (misurata con la convenzione indicata in figura 1 e con e_i la tensione di un generico nodo $\mathbf{i}$ rispetto al nodo di riferimento (in questo caso il nodo $\mathbf{4}$), si ottiene il seguente sistema di equazioni (sicuramente linearmente indipendenti, poiché ogni equazione contiene una variabile diversa):

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} \tag{5}$$

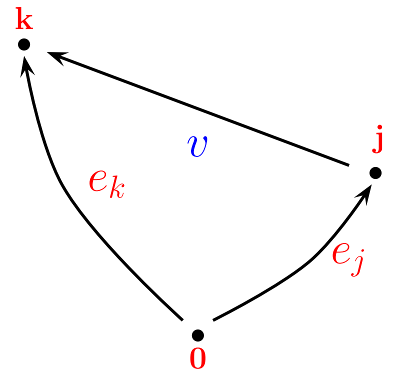

Figura 4. Legge di Kirchhoff delle tensioni: $v = e_k - e_j$

Confrontando l'equazione 5 con le equazioni 3 e 4, le KVL si possono scrivere facendo nuovamente ricorso alla matrice di incidenza:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{e} \tag{6}$$

1.3 Il teorema di Tellegen

Il teorema seguente è dovuto a Tellegen (1952). Caso singolare tra tutti i teoremi della teoria dei circuiti, esso dipende unicamente delle leggi di Kirchhoff e dalla *topologia* del circuito. Di conseguenza può essere enunciato facendo riferimento ad un grafo, piuttosto che ad un circuito.

Si consideri un grafo orientato, che si puo' pensare associato ad un circuito arbitrario. Sia b il numero di rami del grafo ed n il numero dei nodi. Si consideri un arbitrario insieme di correnti di ramo $\boldsymbol{i} = (i_1,i_2,\ldots,i_b)^T$ soddisfacenti alla legge di Kirchhoff delle correnti (7), ove $\boldsymbol{A}$ è la matrice di incidenza (ridotta) associata al grafo.

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{i} = 0 \tag{7}$$

Si consideri ora, facendo riferimento allo stesso grafo, un insieme di tensioni di ramo $\boldsymbol{v} = (v_1,v_2,\ldots,v_b)^T$ soddisfacenti alla legge di Kirchhoff delle tensioni (8), ove $\boldsymbol{e}$ è il vettore delle tensioni di nodo ed i versi di riferimento per tensioni e correnti sono associati secondo la convenzione indicata in figura 1.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{e} \tag{8}$$

Allora si può provare il seguente risultato:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k i_k = 0 \quad \text{ovvero, in forma equivalente,} \quad \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{i} = 0 \tag{9}$$

La dimostrazione è immediata. Infatti, usando l'ipotesi (8), ricordando che la trasposta di un prodotto di matrici è uguale al prodotto, in ordine inverso, delle matrici trasposte e, infine, facendo uso dell'altra ipotesi (7), si ottiene:

$$\boldsymbol{v}^T \boldsymbol{i} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{e})^T \boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}^T (\boldsymbol{A}^T)^T \boldsymbol{i} = \boldsymbol{e}^T (\boldsymbol{A}\boldsymbol{i}) = 0 \tag{10}$$

Osservazione

Nulla vieta di considerare come tensioni e correnti di ramo quelle misurate nel medesimo circuito. È ovvio allora che tali insiemi di tensioni e correnti soddisfano, istante per istante, alle due ipotesi (7) e (8). Di conseguenza, per un qualsiasi circuito, le tensioni e correnti di ramo soddisfano, ad ogni istante t, all'equazione 9. Ma il prodotto $v_k(t)i_k(t)$ non è altro che la potenza elettrica fornita all'istante t al ramo k dal resto del circuito. Di conseguenza l'equazione 9 asserisce che l'energia è conservata. Detto in altre parole, per i circuiti a parametri concentrati la conservazione dell'energia è una conseguenza delle leggi di Kirchhoff.

Riferimenti

[1] L.O. Chua, C.A. Desoer, E.S. Kuh, *Linear and nonlinear circuits*, McGraw-Hill, New York, 1987, Cap. 1.